

MARGARET L. FROEHLICH

MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO LINEARES EM 2D E 3D

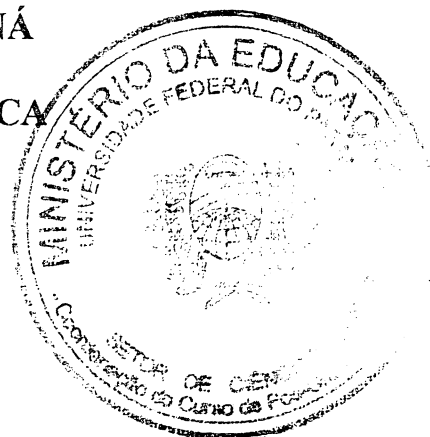
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pablo Devecchi

CURITIBA

2005

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**



PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado da estudante **Margaret Luzia Froehlich** são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação cujo título é **Modelos Cosmológicos Não Lineares Em 2d E 3d**.

Curitiba, 25 de fevereiro de 2005.

Banca Examinadora

**Prof. Fernando Pablo Devecchi
(Orientador/Presidente) (UFPR)**

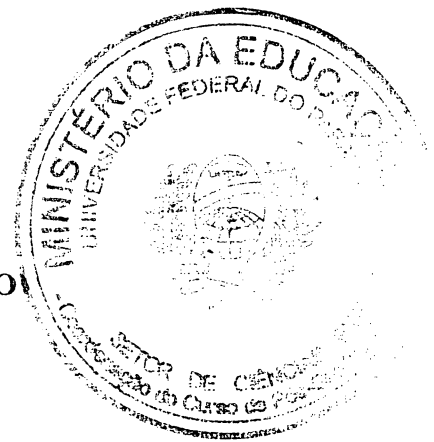
**Prof. Clisthenis Ponce Constantinidis
(UFES)**

**Prof. Gilberto Medeiros Kremer
(UFPR)**

Assinatura

Clisthenis Ponce Constantinidis

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MARGARET LUZIA FROELICH

TÍTULO: “MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO LINEARES EM 2D E 3D.”

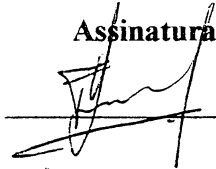
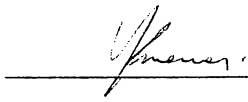
Em sessão pública iniciada às treze horas e trinta minutos, nesta data, após um Seminário sob o título acima, e posterior arguição por esta banca examinadora, esta decidiu atribuir a candidata o conceito global A.

Banca Examinadora

Prof. FERNANDO PABLO DEVECCHI
(Orientador/Presidente) (UFPR)

Prof. CLISTHENIS PONCE CONSTANTINIDIS
(UFES)

Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER
(UFPR)

Assinatura	Conceito
	<u>A</u>
<u>Clisthenis Ponce Constantinidis</u>	<u>A</u>
	<u>A</u>

Curitiba, 25 de fevereiro de 2005.

Resumo

Apresentamos neste trabalho um estudo das soluções cosmológicas em dois modelos de gravitação em dimensões reduzidas. O primeiro modelo, em duas dimensões espaço-temporais (2D), parte da teoria de Jackiw-Teitelboim e inclui um termo não linear no escalar de curvatura (R). O segundo modelo, em três dimensões espaço-temporais (3D), se serve da dinâmica gravitacional escalar proposta por Cornish e Frankel e inclui novamente um termo não-linear em R na sua dinâmica. O fluido cosmológico (a fonte gravitacional) é modelado em todos os casos pela equação de estado de van der Waals. Focalizamos em particular o estudo das transições entre regimes de aceleração e desaceleração do fator de escala cósmica. Estas transições podem representar tanto universos (2D e 3D) jovens saindo do regime inflacionário, como universos velhos em que a energia escura começa a predominar sobre a matéria.

Abstract

In this work, we present an analysis of the cosmological solutions coming from two gravitational models in lower dimensions. The first model, in two space-time dimensions (2D), takes as starting point the Jackiw-Teitelboim model and adds a non-linear term in the scalar curvature (R). The second formulation, in three space-time dimensions (3D), uses the scalar gravitational model proposed by Cornish and Frankel and also includes a non-linear term in R . The sources, in all cases, are modelled by the van der Waals equation of state. In particular we focus on the analysis of transitions between accelerated and decelerated regimes. These transitions could describe, in one hand, young (2D and 3D) universes leaving the inflationary era and, in the other hand, old universes where dark energy starts to dominate over matter.

Agradecimentos

À minha família

Ao prof. Dr. Fernando Pablo Devecchi (orientador)

Ao Grupo de Termodinâmica e Cosmologia

Aos meus professores

Ao prof. Carlos de Carvalho (pelo suporte computacional)

Aos colegas da Pós-Graduação

Sumário

1	Introdução	7
2	Gravitação e Cosmologia	11
2.1	Gravitação	11
2.1.1	Tensor Métrico	12
2.1.2	Equação de Movimento da Partícula Teste	12
2.1.3	Tensor de Riemann	14
2.1.4	Leis de Conservação	15
2.1.5	Equações de Campo	17
2.2	A Relatividade Geral e a Cosmologia	19
2.2.1	Princípio Cosmológico	19
2.2.2	Coordenadas Comóveis	19
2.2.3	Métrica de Robertson-Walker	20
2.2.4	Expansão do Universo	21
2.2.5	Modelo Padrão	23
2.2.6	Densidade e Energia Escura	24
2.2.7	Radiação Cósmica de Fundo	29
2.2.8	Problemas com o Modelo Padrão	30
2.2.9	Universo Inflacionário	33
3	Gravitação e Cosmologia em Dimensões Reduzidas	35
3.1	Gravitação e Cosmologia em 2D	36

3.1.1	Modelo de Jackiw-Teitelboim	37
3.1.2	O Modelo CGHS	39
3.1.3	Modelos em 2D com inflação e energia escura	40
3.2	Gravitação e cosmologia em 3D	43
3.2.1	Soluções Cosmológicas Estáticas e Esféricas	45
3.2.2	Soluções Cosmológicas Não-Estáticas	47
3.2.3	Limite Newtoniano e a Teoria $R = \kappa T$ em 2+1 dimensões	47
3.2.4	Modelo com inflação e energia escura em 3D	49
4	Cosmologias $1/R$	54
4.1	Modelo $1/R$ em 4D	55
4.2	Modelos $1/R$ em 2D	56
4.3	Modelos $1/R$ em 3 D	67
5	Conclusão	74
	Referências Bibliográficas	77

1

Introdução

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein é um dos grandes trunfos da Física do século XX, utilizando, entre outras, a idéia revolucionária de espaço-tempo dinâmico para descrever o comportamento da interação gravitacional. Uma das áreas onde a Relatividade Geral mostrou fortemente seu potencial é a cosmologia. O papel das diferentes formas de matéria na expansão do Universo, a importância da radiação eletromagnética na dinâmica cósmica e a possibilidade da existência de outros tipos de fontes foram colocados em evidência graças à teoria gravitacional de Einstein.

Um ingrediente importante na dinâmica dos modelos cosmológicos é o comportamento da aceleração do fator de escala cósmico $a(t)$. No caso particular de um universo jovem, pode-se utilizar o modelo inflacionário que postula uma expansão extrema do universo nos primeiros instantes após o big bang (mas fora da era de Planck), fornecendo uma expansão com aceleração positiva. Um outro resultado muito importante é a descrição do universo atual, também em expansão com aceleração positiva, cuja fonte seria a chamada energia escura, postulada sobre uma das evidências experimentais mais importantes de toda a cosmologia observacional.

Na tentativa de refinamento dos modelos cosmológicos começam a aparecer dificuldades de ordem técnica e conceitual na medida em que novos ingredientes começam a ser incorporados tais como novos constituintes, interações não gravitacionais entre esses cons-

tituintes, ou modelos anisotrópicos. Da mesma forma as tentativas de inclusão de efeitos quânticos na gravitação tem sido em muitos casos infrutíferas e nas melhores situações, modestas. Focalizados nesses problemas os modelos em dimensões reduzidas (2D e 3D) foram propostos nos anos 80. Desde o começo estes modelos apresentaram resultados promissores. Em 1981 Polyakov apresentou uma formulação de gravitação 2D efetiva onde os efeitos gravitacionais eram obtidos a partir de uma ação semi-clássica (após a integração sobre os campos de matéria) [1]. Um modelo “parente” da teoria de Polyakov é o modelo de Jackiw-Teitelboim (JT) que se afirmou como uma outra formulação consistente bidimensional [1]. Este modelo foi investigado de diversas formas, inclusive dentro do contexto cosmológico. O papel da radiação, da matéria, e o caso inflacionário foram investigados em trabalhos recentes [2, 3].

O caso da energia escura vem recebendo uma forte atenção da comunidade científica. Diversas maneiras de se formular a sua contribuição para a evolução do universo foram propostas: a constante cosmológica, um campo escalar, equações de estado exóticas, etc. Recentemente tem sido proposto na literatura uma nova idéia utilizando termos não lineares [4, 5]. Como dissemos os termos não lineares foram propostos para simular os efeitos da energia escura dentro de uma interpretação geométrica. A inclusão desses efeitos é feita com uma modificação da ação de Einstein em que um termo não linear no escalar de curvatura é adicionado ao termo canônico. Os resultados incluem aceleração cosmológica positiva via energia escura para uma era atual e transição entre os períodos desacelerado do passado, dominado pela matéria, e o acelerado de hoje.

A simulação geométrica da energia escura pode ser testada em modelos cosmológicos 2D e 3D. Nesta dissertação pretendemos investigar os efeitos produzidos pela inclusão de termos não lineares em R nessas formulações. A dinâmica de partida é a do modelo de Jackiw-Teitelboim em 2D onde incluímos o termo R^{-1} , um invariante natural por transformações gerais de coordenadas. Com esta equação para o campo gravitacional e a equação de balanço obtida pela lei de conservação do tensor energia-momento temos um sistema de equações diferenciais não lineares cujo comportamento é analisado via soluções numéricas

(as soluções analíticas conhecidas correspondem a regimes cosmológicos triviais). A análise é dividida para tempos pequenos em que a contribuição do termo não-linear é irrelevante, devido à presença do tensor energia-momento da matéria, e para tempos grandes onde aquele começa a se tornar importante. Em particular, pretende-se verificar a possibilidade do termo geométrico ser responsável por um universo (2D) velho acelerado positivamente, desempenhando portanto o papel de energia escura. Obtemos a evolução temporal do fator de escala cósmico para descrever a expansão do Universo, a evolução da densidade de energia para descrever o comportamento das fontes gravitacionais e finalmente a aceleração que pode ser utilizada como norma para a classificação dos diferentes regimes cosmológicos.

Em 3D partimos do modelo escalar proposto por Cornish e Frankel que entre outras características importantes apresenta um limite newtoniano [6]. Nos modelos de Einstein 3D o tensor de Riemann é zero fora das fontes, assim não há propagação de ondas gravitacionais e conseqüentemente o limite newtoniano é perdido nessa formulação. Todavia, no contexto cosmológico o espaço-tempo 3D é preenchido completamente pelas fontes e portanto em muitos casos segue um comportamento regular. Os ingredientes básicos desses modelos são as equações de campo gravitacional (onde são consideradas as equações de Einstein ou uma dinâmica alternativa), a lei de conservação do tensor energia-momento, a equação de estado das fontes e suas equações de campo correspondentes, na descrição usual de espaço-tempo-curvo. Consideramos nesta dissertação a possibilidade de se obter regimes de três eras que podem corresponder a um período inicial inflacionário em 3D, seguido por uma era de desaceleração dominada pela matéria (ou radiação) e finalmente um período de aceleração dominado pela energia escura que é representada pela contribuição do termo não-linear do escalar de curvatura.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira: no capítulo um apresentamos os ingredientes básicos da RG e da cosmologia em 4D; no capítulo dois analisamos modelos de gravitação em dimensões reduzidas (2D e 3D) e soluções cosmológicas com regimes de aceleração e desaceleração. No capítulo três estudamos modelos em 2D e 3D que incluem um termo não-linear do escalar de curvatura na dinâmica para simular períodos dominados

pela energia escura e por último finalizamos com nossas conclusões.

2

Gravitação e Cosmologia

2.1 Gravitação

É conhecida da literatura a incompatibilidade da gravitação Newtoniana com a Relatividade Especial [7–9]. Face a este impasse Albert Einstein propôs uma nova teoria de gravitação hoje conhecida como teoria da Relatividade Geral (RG). Um princípio básico, tanto da dinâmica de Newton como da dinâmica não gravitacional de Einstein, é o da relatividade dos sistemas inerciais, ou seja, não há referenciais iniciais privilegiados, todos são equivalentes. Em outras palavras, as leis da dinâmica são invariantes por transformações de Lorentz [7]. Essa universalidade porém é quebrada para transformações de coordenadas entre sistemas acelerados, que devem ser considerados quando são levados em conta efeitos gravitacionais. A RG substitui a invariância de Lorentz pela invariância por transformações gerais de coordenadas (TGC) como simetria fundamental dos sistemas que incluem a força gravitacional.

Nesta seção apresentamos os elementos básicos do cálculo tensorial que representa a linguagem da RG de Einstein.

2.1.1 Tensor Métrico

Numa variedade pseudo-euclidiana temos o tensor métrico de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ que caracteriza o espaço-tempo na Relatividade Restrita.

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.1)$$

é o elemento de linha em função de $\eta_{\alpha\beta}$, onde

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

e $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Para o caso de variedades curvas (conhecidas como variedades de Riemann [7]) o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

que é um invariante natural por TGC. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ obedece à seguinte lei de transformação

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}, \quad (2.4)$$

que caracteriza qualquer tensor de segunda ordem. Duas propriedades básicas são que o tensor métrico é simétrico por troca de índices e que sua versão contravariante define a sua inversa,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad , \quad g_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} = \delta_\lambda^\nu. \quad (2.5)$$

2.1.2 Equação de Movimento da Partícula Teste

Consideremos uma partícula em queda livre em relação à Terra cujo movimento, quando observado de um referencial inercial local ξ^α , é regido pela dinâmica de partícula livre

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.6)$$

onde τ é o tempo próprio.

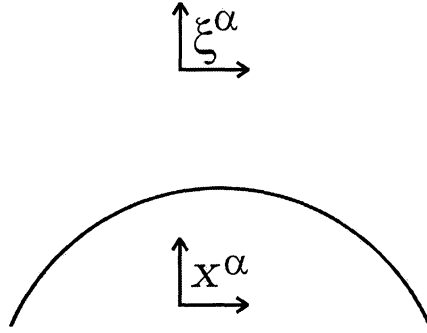


Fig. 2.1: *Referencial inercial ξ^α e referencial arbitrário x^α .*

De acordo com o princípio da covariância geral a inclusão dos efeitos gravitacionais implica na mudança de descrição para um sistema de referência arbitrário denotado por x^μ e cujo tensor métrico é $g_{\mu\nu}$. A equação de movimento da partícula em presença do campo gravitacional é obtida pelo princípio da ação mínima

$$\delta S = \delta \int ds = 0, \quad (2.7)$$

onde ds é o elemento de linha caracterizado pela métrica $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.8)$$

escrevendo ds em função do parâmetro λ da curva $x^\mu = x^\mu(\lambda)$

$$ds = \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda, \quad (2.9)$$

assim

$$\delta S = \delta \int \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda = 0, \quad (2.10)$$

então

$$\delta S = \int \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} \delta \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda = 0. \quad (2.11)$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange e simetrizando as derivadas do tensor métrico encontramos que

$$g_{\mu\kappa} \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (2.12)$$

multiplicando por $g^{\kappa\tau}$, temos

$$\frac{d^2 x^\tau}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\tau \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (2.13)$$

que é a equação de uma curva geodésica, onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\tau = \frac{1}{2} g^{\kappa\tau} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right), \quad (2.14)$$

são os símbolos de Christoffel [7, 10]. De acordo com as expressões (2.13) e (2.14) o termo dependente no símbolo de Christoffel refere-se aos efeitos gravitacionais das fontes sobre a partícula teste.

2.1.3 Tensor de Riemann

Pode-se construir um tensor que expresse os efeitos gravitacionais a partir do tensor métrico e suas primeiras derivadas, conhecido como tensor de curvatura ou tensor de Riemann [7]. Embora o tensor de curvatura dependa da escolha de um sistema de coordenadas a curvatura caracterizada em termos da métrica é uma quantidade intrínseca. A não nulidade deste tensor implica na existência de campos gravitacionais e no espaço-tempo plano ele desaparece [2].

Em termos do símbolo de Christoffel o tensor de curvatura de Riemann é dado por

$$R_{\mu\lambda\kappa}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\alpha}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\tau\kappa}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\tau - \Gamma_{\mu\kappa}^\tau \Gamma_{\tau\lambda}^\alpha, \quad (2.15)$$

O tensor de Riemann covariante é definido como

$$R_{\alpha\mu\lambda\kappa} = g_{\alpha\beta} R_{\mu\lambda\kappa}^\beta. \quad (2.16)$$

Obtém-se o tensor de Ricci pela contração do tensor de Riemann

$$R_{\mu\kappa} = R_{\mu\alpha\kappa}^\alpha = g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\mu\lambda\kappa}, \quad (2.17)$$

com a contração do tensor de Ricci, tem-se

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} = g^{\mu\kappa} g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\mu\lambda\kappa}, \quad (2.18)$$

que é o escalar de curvatura.

O tensor de Riemann é simétrico em relação a troca dos pares de índices e antisimétrico em relação a troca de índices de cada par

$$R_{\alpha\mu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\alpha\mu} \quad , \quad R_{\alpha\mu\lambda\kappa} = -R_{\mu\alpha\lambda\kappa} \quad , \quad R_{\alpha\mu\lambda\kappa} = -R_{\alpha\mu\kappa\lambda}. \quad (2.19)$$

Das propriedades de simetria segue que a soma cíclica é nula

$$R_{\alpha\mu\lambda\kappa} + R_{\alpha\kappa\mu\lambda} + R_{\alpha\lambda\kappa\mu} = 0. \quad (2.20)$$

Adotando um referencial inercial local e derivando em um dado ponto x , $\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}$ desaparece mas suas derivadas não. Então pela equação (2.16)

$$R_{\alpha\mu\lambda\kappa;\xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\xi}} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\alpha}} \right), \quad (2.21)$$

permutando $\lambda\kappa$ e ξ obtém-se

$$R_{\alpha\mu\lambda\kappa;\xi} + R_{\alpha\mu\xi\lambda;\kappa} + R_{\alpha\mu\kappa\xi;\lambda} = 0, \quad (2.22)$$

que é conhecida como identidade de Bianchi.

2.1.4 Leis de Conservação

Uma das mais importantes leis da física é a lei de conservação de energia, em relatividade especial aprendemos que matéria e energia são equivalentes e que as leis de conservação separadas precisam ser substituídas por um novo princípio que as integre, em cosmologia precisamos ter este fundamental princípio em mente.

Do fato do Universo ser homogêneo e isotrópico em larga escala as fontes podem ser comparadas a um fluido perfeito chamado de fluido cosmológico. Neste fluido todos os constituintes, desde partículas fundamentais até galáxias, são tratados como partículas.

Podemos modelar as fontes gravitacionais do universo como um fluido tendo em cada ponto uma velocidade \vec{v} [7, 11]. Supondo um referencial em que o fluido está em repouso, neste ponto do espaço-tempo o tensor energia-momento toma a forma

$$\tilde{T}^{ij} = p\delta_{ij}, \quad \tilde{T}^{i0} = T^{0i} = 0, \quad \tilde{T}^{00} = \rho, \quad (2.23)$$

sendo p a pressão e ρ a densidade de energia.

Tomemos agora um outro referencial em que o fluido se move com velocidade \vec{v} . O referencial em repouso é o referencial de laboratório. A conexão entre as coordenadas comóveis \tilde{x}^β e as coordenadas do laboratório é $x^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha(\vec{v})\tilde{x}^\beta$, com $\Lambda_0^0 = \gamma$ e $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$, onde estamos fazendo $c = 1$, assim

$$\Lambda_0^i = \gamma v_i, \quad \Lambda_j^i = \delta_{ij} + v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{v^2}, \quad \Lambda_j^0 = \gamma v_j. \quad (2.24)$$

Mas $T^{\alpha\beta}$ é um tensor, assim em um referencial de laboratório temos

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha(v) \Lambda_\delta^\beta(v) \tilde{T}^{\gamma\delta}, \quad (2.25)$$

ou explicitamente

$$T^{ij} = p\delta_{ij} + (p + \rho) \frac{v_i v_j}{1 - v^2}, \quad T^{i0} = (p + \rho) \frac{v_i v_0}{1 - v^2}, \quad T^{00} = (\rho + p v^2) \frac{v_0^2}{1 - v^2}, \quad (2.26)$$

e de forma mais geral

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p + \rho)U^\alpha U^\beta, \quad (2.27)$$

onde $U^\alpha U^\beta$ é o quadri-vetor velocidade, sendo $U^\alpha = (\gamma c, \gamma \vec{v})$.

Por outro lado, as fontes do campo gravitacional podem ser compostas por um fluido fora do equilíbrio. Então o tensor energia momento, no caso de um Universo homogêneo e isotrópico, é escrito da seguinte forma

$$T^{\mu\nu} = \left(\sum_i [\rho_i + p_i] + \varpi \right) U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu} \left(\sum_i p_i + \varpi \right), \quad (2.28)$$

onde ρ_i e p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são a densidade de energia e a pressão hidrostática das fontes, respectivamente e ϖ é a pressão dinâmica que está relacionada à interação entre os constituintes através do campo gravitacional.

Pela lei de conservação do tensor energia-momento a derivada covariante desse tensor deve ser igual a zero

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.29)$$

A formulação da lei de conservação com um campo gravitacional precisa considerar o quadri-momento da matéria mais energia bem como o quadri-momento do próprio campo

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} + t_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.30)$$

onde $t_{;\nu}^{\mu\nu}$ é a contribuição do campo gravitacional [8].

2.1.5 Equações de Campo

A teoria de gravitação de Einstein descreve a evolução do campo gravitacional a partir de um conjunto de expressões conhecidas como equações do campo. Elas são equações diferenciais parciais não-lineares que na forma tensorial são dadas por

$$G^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e $T^{\mu\nu}$ o tensor energia-momento das fontes. O significado desta equação pode ser resumido nas palavras de Wheeler: “ O espaço diz à matéria como se mover e a matéria diz ao espaço como se curvar ” [12].

Aplicando o princípio de ação mínima para uma variação na métrica $g_{\mu\nu}$

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0, \quad (2.32)$$

onde S_g é a ação do campo gravitacional e S_m a ação da matéria. Considerando as duas ações

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega, \quad \delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.33)$$

com a contração dos símbolos de Christoffel e do tensor de Ricci e a definição de divergente mais a lei de Gauss [7, 8], obtém-se

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.34)$$

assim, encontramos que

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega = 0, \quad (2.35)$$

sendo $\delta g^{\mu\nu}$ arbitrários, tem-se finalmente as equações do campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.36)$$

o lado direito da expressão está relacionado às fontes gravitacionais e o esquerdo à geometria do espaço tempo. Em que

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.37)$$

é o tensor de Einstein.

2.2 A Relatividade Geral e a Cosmologia

Nesta seção apresentamos os elementos básicos da relação entre a Relatividade Geral e a Cosmologia.

2.2.1 Princípio Cosmológico

O Universo é o mesmo em todas as direções (ponto a ponto), ou seja, ele é isotrópico e homogêneo, esse fato é conhecido como princípio cosmológico. Esse princípio, porém, só é válido para grandes distâncias, da ordem de 100Mpc; em sistemas como galáxias isso naturalmente não é verdadeiro [7, 13].

2.2.2 Coordenadas Comóveis

Apesar do Universo ser o mesmo em todas as direções ele não é estático, e é necessário ter em mente modelos consistentes com essa realidade. Pela adoção do princípio cosmológico, consideramos que os coeficientes métricos são sempre os mesmos, ou seja que não dependem da localização espacial nem da direção. A métrica usual do espaço-tempo plano de Minkowski da relatividade especial,

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \quad (2.38)$$

é um exemplo de uma métrica homogênea e isotrópica, pois seus coeficientes são constantes mas ela é uma métrica estática. Nós podemos generalizar esta métrica incluindo uma função de escala arbitrária que varie no tempo,

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - a^2(t)(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \quad (2.39)$$

o coeficiente $a(t)$ é denominado fator de escala cósmica.

Se o fator de escala cresce com o tempo e duas partículas, em repouso em relação ao referencial comóvel, estão separadas por uma certa distância, em um tempo posterior esta distância será maior. Na forma da equação (2.39), as coordenadas (x, y, z) são chamadas

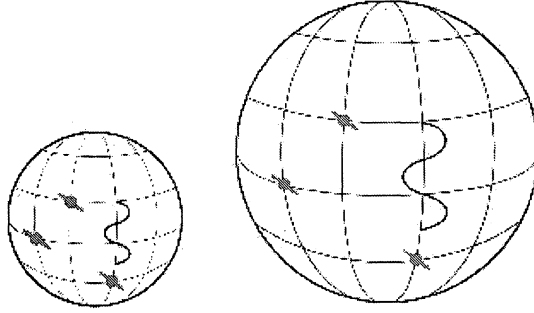


Fig. 2.2: Coordenadas comóveis.

coordenadas comóveis; isto é, elas permanecem fixas, a distância entre elas é que muda através do fator de escala. Podemos utilizar um balão como analogia, suponha linhas de latitude e longitude sobre a superfície de um balão, observe figura (2.2). Se o balão começa a encher, e as linhas se expandem com ele, as suas coordenadas relativas a seus pontos porém não se alteram. As coordenadas espaciais na métrica cosmológica não mudam com o tempo, a variação do Universo com o tempo é totalmente descrita pelo fator de escala $a(t)$ [14].

2.2.3 Métrica de Robertson-Walker

A métrica (2.39), que foi introduzida para descrever a dinâmica do universo, é apropriada apenas para uma geometria plana, entretanto podemos prever outros tipos de geometria que continuem respeitando o princípio cosmológico. Uma métrica assim foi construída em 1936 por H. P. Robertson e A. G. Walker independentemente; eles mostraram que a métrica espaço-tempo mais geral para um universo dinâmico, homogêneo e isotrópico pode ser escrita na forma

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - a^2(t) \left(\frac{\Delta r^2}{1 - kr^2} + r^2 \Delta \theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \Delta \phi^2 \right), \quad (2.40)$$

onde nós usamos coordenadas esféricas comóveis, com uma distância radial r .

A parte espacial tridimensional do espaço-tempo é especificada pela constante de curvatura k . Existem três geometrias possíveis para um universo homogêneo e isotrópico, se $k = 1$ temos uma geometria esférica, se $k = 0$ uma geometria plana e finalmente se $k = -1$ uma geometria hiperbólica.

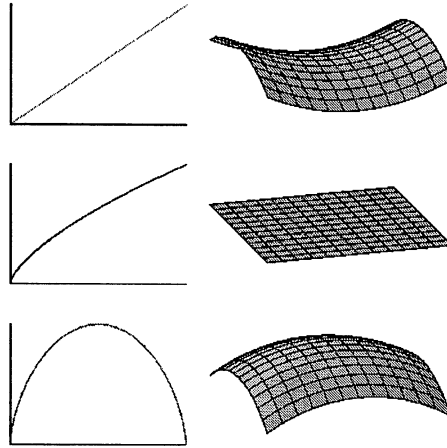


Fig. 2.3: *Geometria do universo.*

Na figura (2.3) estão representadas as três geometrias possíveis que estão associadas à expansão do universo. Se o universo possuir geometria hiperbólica ele se expande para sempre (figura do topo, ao lado aparece o gráfico da evolução temporal do fator de escala); se, por outro lado, ele for plano o universo é aberto (figura do meio), mas se o universo possuir geometria esférica ele caracteriza um universo fechado (figura inferior) [14].

2.2.4 Expansão do Universo

Em 1912 Slipher descobriu que as linhas espectrais das estrelas na galáxia M31 mostravam um enorme deslocamento para o azul, indicando que esta galáxia está se aproximando do Sol a uma velocidade de 300km/s. Slipher demonstrou, depois de um levantamento sistemático, que a maioria das galáxias apresentam deslocamento para o vermelho, indicando que elas estão se afastando, descobriu também que quanto mais fraco era o brilho da galáxia e portanto mais distante, maior era o deslocamento para o vermelho indicando uma velocidade maior [13, 15].

Em 1929, Hubble provou que as galáxias se afastam com velocidades proporcionais as suas distâncias, observe o diagrama da figura (2.4). A velocidade de recessão é dada por

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad (2.41)$$

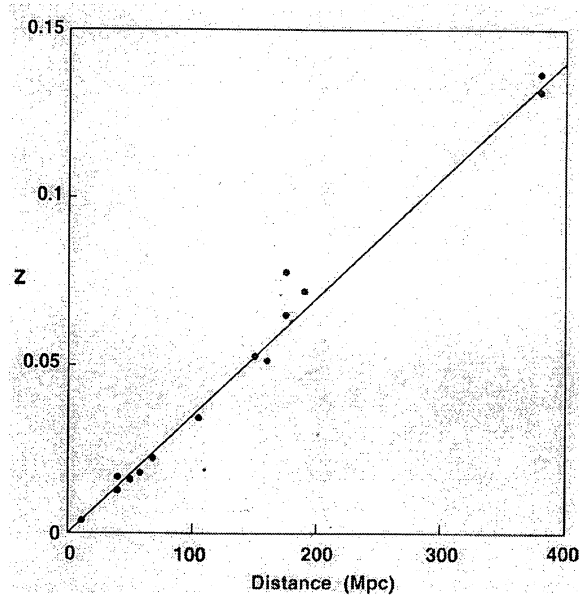


Fig. 2.4: *Diagrama obtido por Hubble usando redshifts.*

e é na mesma direção de r . Mas $r = ax$ no referencial comóvel, então

$$\frac{dr}{dt} = \dot{a}x = \frac{\dot{a}}{a}r, \quad (2.42)$$

podemos escrever então a equação (2.41) em termos da função de Hubble $H = \dot{a}/a$

$$v = Hr, \quad (2.43)$$

a equação (2.43) é conhecida como a lei de Hubble.

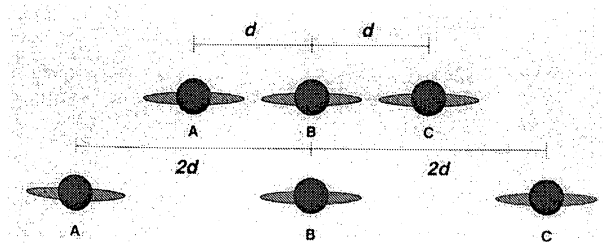


Fig. 2.5: *Lei de Hubble demonstrada para três galáxias.*

Observe, na figura (2.5), a lei de Hubble sendo aplicada a três galáxias; o parâmetro de Hubble é constante no espaço devido ao princípio cosmológico, mas não é constante no tempo, podemos definir um valor completamente constante a partir das medidas desse parâmetro no tempo atual

$$v = H_0 r \quad (2.44)$$

onde H_0 é conhecida como constante de Hubble.

2.2.5 Modelo Padrão

O primeiro modelo de Universo foi proposto por Lemaître e Friedmann independentemente. Eles encontraram soluções das equações de Einstein que descrevem um Universo de acordo com as observações de Hubble, este modelo se tornou conhecido como Modelo Padrão.

Escrevemos as equações de campo da Relatividade Geral

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

com uma métrica de Robertson-Walker dada a hipótese de homogeneidade e isotopia do Universo

$$ds^2 = (cdt)^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.46)$$

encontramos as componentes não nulas do tensor de Ricci

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \quad (2.47)$$

Com as fontes sendo descritas pelo tensor energia-momento de um fluido perfeito

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu, \quad (2.48)$$

onde ρ a densidade de energia, p a pressão do fluido e $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é a quadri-velocidade no referencial comóvel. O traço do tensor energia-momento é $(\rho - 3p)$ e as componentes não nulas são dadas por

$$T_{00} = -\rho, \quad T_{ii} = -pg_{ii}. \quad (2.49)$$

Das equações de Einstein (2.45) e das equações (2.46)-(2.49) encontramos duas equações independentes

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p), \quad \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p), \quad (2.50)$$

onde admitimos $c = 1$. Podemos reescrevê-las da seguinte forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.51)$$

onde $H = \dot{a}/a$, ρ e p são funções exclusivas do tempo como consequência das hipóteses de isotropia e homogeneidade.

Os modelos que incorporam estas equações são chamados de modelos FLRW, devido a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

2.2.6 Densidade e Energia Escura

Densidade Crítica

Embora a densidade média de matéria do universo seja uma quantidade medida apenas indiretamente, pois ela é determinada através do brilho das galáxias, seus movimentos e suas interações com as vizinhanças, tem grande importância em cosmologia.

Podemos reescrever a equação de Friedmann do seguinte modo

$$\Omega = 1 + \frac{k}{H^2 a^2}, \quad (2.52)$$

onde

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho, \quad (2.53)$$

é o parâmetro de densidade e está ligado a geometria do universo. Se $k > 0$, $\Omega > 1$, a densidade do universo é maior que a densidade crítica, mas se $k < 0$, $\Omega < 1$, a densidade do universo é menor que a densidade crítica e ele se expande para sempre. Se, todavia, o universo for plano, ou seja $k = 0$, teremos uma densidade crítica associada a ele e $\Omega = 1$ [14],

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.54)$$

como conhecemos o valor da constante de Hubble no tempo presente, calculamos a densidade crítica atual

$$\rho_c(t) = 1,88h^2 10^{-29} \text{ kg m}^{-3}, \quad (2.55)$$

convertendo massa para massa solar e distâncias em megaparsecs

$$\rho_c(t) = 2,78h^{-1}10^{11}M/(h^{-1}Mpc)^3, \quad (2.56)$$

onde $h = 0,72 \pm 0,08$ [13].

Da densidade crítica, podemos redefinir o parâmetro densidade Ω , especificando a razão entre a densidade de massa-energia atual e a densidade crítica

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.57)$$

As medidas atuais apontam para um parâmetro de densidade da matéria $\Omega_M = 0,25 \pm 0,1$, somando matéria escura, bárions e neutrinos; e para o da energia $\Omega_E = 0,7 \pm 0,1$ englobando fótons, neutrinos não massivos e energia escura. O parâmetro total fica, então, por volta de $\Omega_T = 1 \pm 0,1$.

Parâmetro de Desaceleração

A razão de mudança do fator de escala \dot{a} , fornece a expansão do universo, \ddot{a} é a aceleração do universo e denota como a própria expansão muda com o tempo. O negativo da aceleração é, então, a desaceleração definida por $-\ddot{a}$; porém podemos defini-la como uma quantidade adimensional

$$q = -\frac{\ddot{a}}{H^2 a} \quad (2.58)$$

Fisicamente o parâmetro de desaceleração nos diz se a velocidade está crescendo ou decrescendo. Realmente, até o início da década de 1990, os cosmólogos acreditavam que o universo fosse constituído basicamente por matéria, sendo que a contribuição da radiação de fundo para a densidade de energia do universo, sob a forma de fótons e demais relíquias relativísticas, é desprezível na era atual. De acordo com a cosmologia padrão, num Universo constituído apenas por matéria existe uma conexão entre a geometria e o seu destino, como vimos na seção anterior.

Nucleossíntese

A abundância de elementos leves (${}^4\text{He}$, D , ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}$) é certamente a maior evidência do modelo padrão, pois estes foram criados nos estágios primordiais do universo enquanto que a maioria dos elementos pesados foram produzidos mais tarde no interior de estrelas.

A aproximadamente 180s após o Big Bang à temperaturas e densidades muito elevadas, nêutrons e prótons puderam se unir diretamente para formar o núcleo de deutério.

O deutério é formado pela reação $n + p \mapsto d + \gamma$ onde γ é o fóton liberado. O deutério se combina facilmente com um próton, ou outro deutério formando núcleos de hélio. Todos os hélios do universo, incluindo os do Sol, foram criados nessa época.

Se todos os átomos tivessem sido não-energéticos no final da época dos hádrons, quando o número de nêutrons e prótons era aproximadamente o mesmo, então todos os prótons do universo teriam se combinado imediatamente com os nêutrons se unindo continuamente a hélios tornando a existência dos hidrogênios impossível. Devido a este fato Gamow, Alpher e Hermann propuseram que o Universo jovem precisava ter um bilhão de fótons por partícula de matéria, e que depois da nucleossíntese esses fótons continuaram permeando o universo dando origem a radiação cósmica de fundo.

O hidrogênio é atualmente o elemento mais comum no Universo seguido do hélio, a maior parte dos outros elementos são bem menos abundantes. Entretanto, os outros núcleos criados na nucleossíntese tem importantes implicações cosmológicas já que suas quantidades podem ser medidas atualmente. A abundância de deutério depende muito das condições do universo durante a sua formação, especialmente sobre a densidade de bárions.

A nucleossíntese é inteiramente controlada pela temperatura e pela razão entre nêutrons e prótons. Certos modelos cosmológicos dependem de fatores como a taxa de expansão e a geometria, influenciando a nucleossíntese apenas indiretamente, afetando principalmente o tempo cósmico em que o Universo atinge a temperatura apropriada, bem como pelo controle da densidade de núcleos e a razão nêutron/próton no início da fusão. A determinação da densidade de deutério somente é relevante para a densidade total de massa se o Universo

presente for composto apenas de bárions. Mas esse não é o caso, é possível que a maior parte da massa seja devida a algum tipo de partícula exótica, então o limite do deutério dá apenas a fração da massa total de bárions [13].

Recombinação

No final da nucleossíntese, o Universo era um mar de fótons, neutrinos e matéria ionizada (elétrons, prótons, núcleos de hélio, deutério e lítio) onde os elétrons espalhavam continuamente os fótons, tornando o Universo opaco, esta era caracteriza a era dominada pela radiação. A medida que o Universo se expande a densidade decresce proporcionalmente ao fator de escala; no caso da matéria, com o fator de escala ao cubo, e da radiação numa quarta potência dentro do modelo padrão [14]. De tal maneira que, em aproximadamente $10^{11}s$ as densidades se igualaram e o fator de escala estava entre $t^{\frac{1}{2}}$ (Universo de radiação) e $t^{\frac{2}{3}}$ (Universo de matéria), como mostrado na figura (2.6). Esta época está associada também a formação de estruturas.

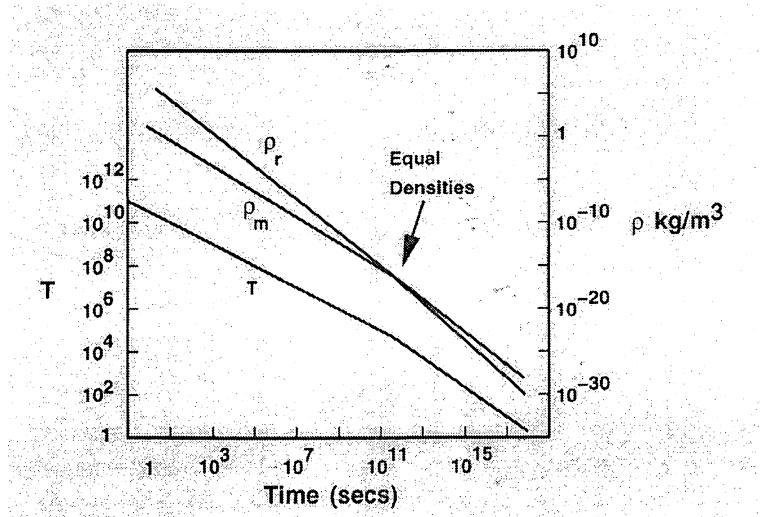


Fig. 2.6: *Evolução das temperaturas e densidades do Universo.*

Em torno de $10^{13}s$, a temperatura do universo caiu para aproximadamente 3000K, os elétrons foram atraídos pelos campos dos núcleos e os fótons aumentaram seu livre caminho médio, dando lugar a recombinação. Dois eventos significativos ocorreram então, o Universo se tornou transparente, e a radiação mais a matéria saíram do equilíbrio térmico.

Matéria Bariônica

No início do Universo, as escalas características da mecânica quântica e da gravitação eram semelhantes, e a gravidade podia ser comparada, em seus efeitos imediatos a outras forças. Sabemos que a gravidade controla a expansão do Universo principalmente porque ela é exclusivamente atrativa, mas precisaríamos de uma gravitação quântica para estudar os primeiros momentos do Universo.

Durante a época de Planck (de 0 até 10^{-43} s) todas as quatro forças fundamentais da natureza (gravidade, eletromagnetismo e as interações nucleares fortes e fracas) compunham uma única força. No final dessa época a gravidade se descolou das outras forças produzindo a primeira quebra de simetria no Universo. Aproximadamente 10^{-35} s, época da unificação, as outras três forças se unificaram formando uma única e indistinguível força. As teorias que explicam o comportamento das partículas e a unificação das três forças nessa época são conhecidas como Grandes Teorias Unificadas (GUT). A GUT discute a interação das partículas fundamentais, os hádrons. Os férmions elementares se dividem em duas famílias, os hádrons e os léptons. Os hádrons participam das interações fortes, são massivos e se constituem de pequenas partículas denominadas quarks. A teoria prevê seis espécies de quarks. Os hádrons podem se quebrar em bárions e mésons dependendo de sua construção e a espécie de quarks presentes. Os mésons são compostos de um quark e um anti-quark, possuindo uma meia-vida bastante curta. Os bárions constituem-se de três quarks sendo a maioria núcleos, prótons e neutrons.

Na época da unificação, sob as condições da GUT, as leis da conservação do número de bárions foi violada levando a um excesso de matéria, conhecido como bariogênese. Se a bariogênese não tivesse ocorrido, não existiria matéria atualmente, toda partícula se destruiria a si mesma através de sua anti-partícula. Essa assimetria entre matéria e anti-matéria levou a criação de todo tipo de matéria que conhecemos hoje e constitui a matéria bariônica.

A figura (2.7) mostra os principais momentos da história do Universo desde o Big

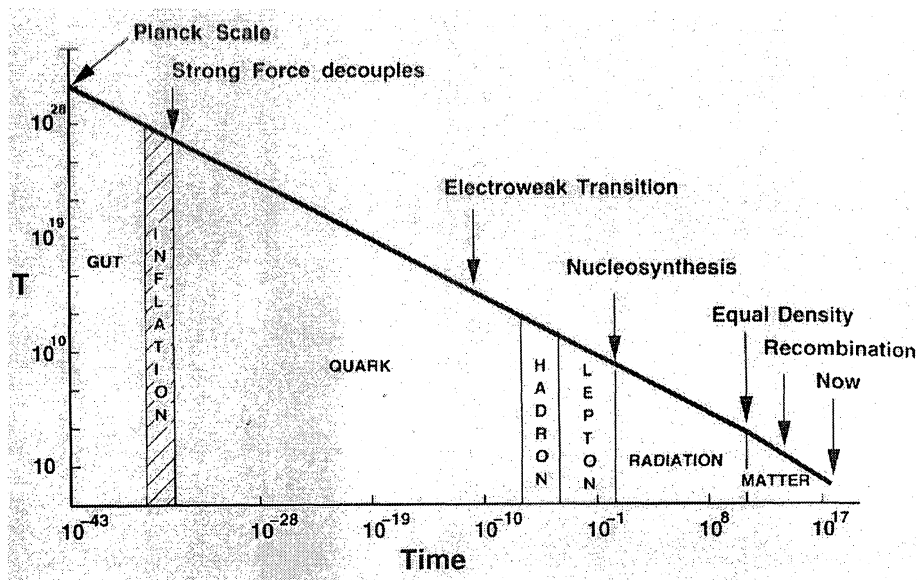


Fig. 2.7: *Grandes momentos da história do Universo.*

Bang até os tempos atuais.

Matéria escura

A matéria escura foi introduzida em cosmologia para explicar as curvas de rotação das galáxias e suas velocidades em aglomerados de galáxias, maiores que as explicáveis pela matéria luminosa. Esta observação foi feita pelo astrônomo suíço Fritz Zwicky [13].

Quando as leis da gravitação de Newton são aplicadas aos movimentos das galáxias em cúmulos de galáxias detecta-se que a massa é muito maior que a massa visível em estrelas e gás. Logo, existe ali um tipo de matéria que não emite radiação eletromagnética.

Se a matéria escura fosse 5 ou 10 vezes a matéria luminosa poderia ser constituída por bárions em buracos negros, anãs marrons e planetas, mas se ela for 100 vezes maior temos que considerar um tipo de partícula exótica que ainda não foi detectado.

2.2.7 Radiação Cósmica de Fundo

Em 1989, o COBE (Cosmic Background Explorer) revelou uma concordância precisa entre as medições do espectro da radiação de fundo de microondas cósmicas e a esperada

natureza térmica da radiação do Big Bang, confirmando a imagem de que a matéria do Universo, por volta dos 300.000 anos após o Big Bang estava, de fato, num estado de plasma quente.

Por volta desta era, o plasma era tão quente e denso que os elétrons livres espalhavam os fótons, reduzindo seu livre-caminho-médio e tornando a matéria plasmática opaca. Mas em 300.000 anos, aproximadamente, o Universo esfriou o suficiente, para que os elétrons pudessem se combinar aos prótons, constituindo uma massa de gás hidrogênio transparente. Há 15 bilhões de anos que os primeiros fótons escaparam, no “momento de último espalhamento”, sofrendo um subsequente alongamento de seu comprimento de onda associado, em virtude da expansão do Universo, até a escala de microondas atual.

Com os fótons e a matéria carregada fortemente acoplados, na época do plasma, a competição entre a gravidade e a pressão de radiação produziu regiões de lenta contração e expansão oscilatórias. Mas estas oscilações geraram alterações locais da curvatura do espaço-tempo, produzindo um “desvio para o vermelho” da radiação e fazendo o fundo de microondas parecer mais frio naquelas direções em que o “desvio para o vermelho” foi maior.

A CBR é a melhor evidência do princípio cosmológico; um Big Bang verdadeiramente homogêneo e isotrópico produz uma relíquia cósmica de fundo que é um corpo negro perfeito em todas as direções, excluindo possíveis interações com a matéria desde a fonte até nossas antenas.

2.2.8 Problemas com o Modelo Padrão

O Big Bang obteve grande sucesso porque criou uma base física para explicar a expansão (observe figura e a radiação cósmica de fundo. Mas ele ainda é incompleto no sentido de explicar alguns problemas fundamentais em cosmologia, como o problema do horizonte e da planura. Por isso alguns modelos incluem a idéia de inflação para os primeiros momentos do Universo (observe a figura (2.8)).

A figura mostra a diferença entre o Modelo Padrão e o inflacionário para o fator de escala e a temperatura em função do tempo. No modelo inflacionário existe uma fase de ex-

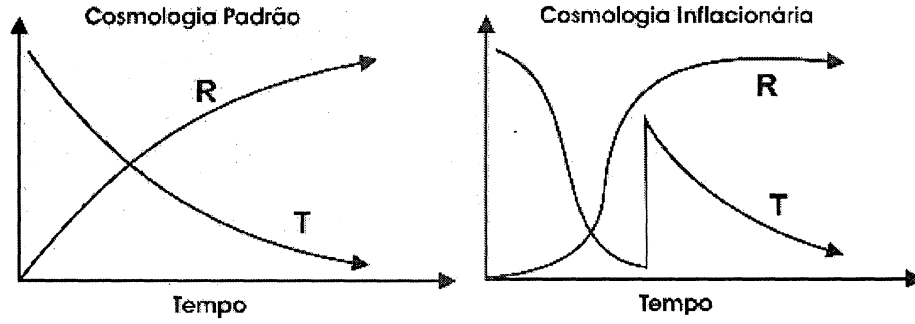


Fig. 2.8: *Comparação entre os dois modelos.*

pansão exponencial que resulta de um rápido esfriamento. No fim da fase inflacionária ocorre um reaquecimento onde a energia do vácuo é convertida para uma forma mais convencional de energia [14].

Horizonte

Considerando um universo plano, temos que uma distância cosmológica é definida como

$$d = a(t) \int_0^r dr. \quad (2.59)$$

Sendo a distância percorrida pela luz

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0. \Rightarrow dr = \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.60)$$

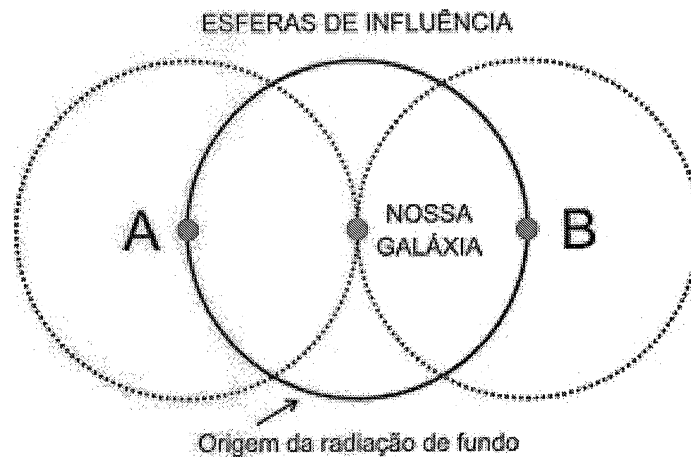


Fig. 2.9: *Universo observável.*

O problema do horizonte refere-se a comunicação entre diferentes regiões do Universo. Se nós olhamos para leste detectamos radiação cósmica de fundo, mas se, por outro lado, olhamos para oeste detectamos radiação cósmica de fundo com exatamente a mesma temperatura que a outra. A luz que vemos vindo de lados opostos do céu, pontos A e B da figura (2.9), viaja desde o desacoplamento (superfície do último espalhamento) até nós; o senso comum nos diz que as radiações de leste e oeste não poderiam estar conectadas causalmente porque a informação não pode viajar mais rápida do que a luz. Porém durante a inflação o Universo se expandiu mais rápido do que a velocidade da luz e regiões que estavam próximas foram levadas para regiões muito afastadas.

Planura

Consideremos Ω para tempos remotos, em um tempo particular ele é dado por

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = 1 + \frac{k}{H^2 a^2} \quad (2.61)$$

Isso mostra que se o espaço é curvo, Ω envolve $1/(H^2 a^2)$.

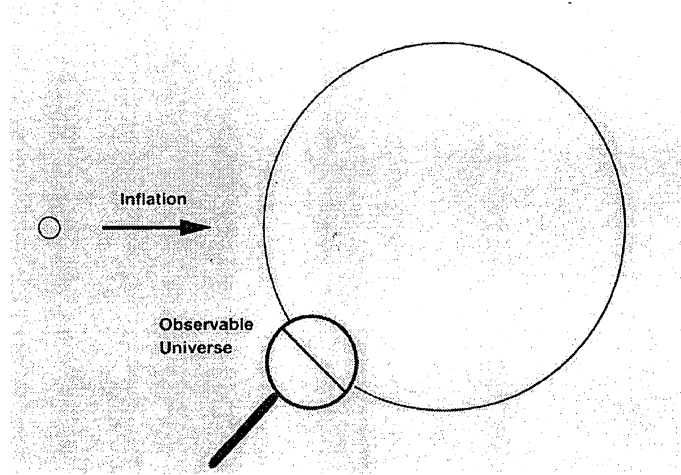


Fig. 2.10: *Estrutura do Universo antes e após a inflação.*

Podemos supor um Universo aberto fazendo a constante de curvatura negativa, observamos que Ω decresce com o acréscimo do tempo tendendo a zero com t tendendo a infinito. Entretanto, dessa maneira o Universo seria fechado no passado e extremamente fechado nos

primeiros segundos do Big Bang. Mas dados astronômicos mostram que o valor de Ω , no presente, é aproximadamente 1; ou seja próximo da densidade crítica, isso quer dizer que ele deveria ter tido uma densidade muito mais baixa no passado.

Por outro lado, se admitimos uma fase inflacionária, figura (2.10), o fator de escala teria se expandido tanto a ponto de se tornar o termo de curvatura desprezível e $\Omega \rightarrow 1$.

2.2.9 Universo Inflacionário

Em regimes de altas energias, temperaturas maiores que 10^{28}K , segundo as teorias da unificação, as três forças se unificaram numa super-força generalizada. Em temperaturas mais baixas esta super-força se dividiu em força eletromagnética, forte e fraca. Aproximadamente 10^{-34}s após o Big Bang, com temperaturas abaixo de 10^{28}K , o Universo entra, por um curto espaço de tempo, em um estado instável chamado de “falso vácuo”. Ou seja, o espaço vazio adquire uma pressão tão alta que acelera a expansão do Universo. Este período é conhecido como a época da inflação.

O propulsor da expansão inflacionária seria um campo escalar $\phi(x, t)$ cujas configurações obedecem à seguinte equação de estado

$$p = -\rho. \quad (2.62)$$

Nas equações de Einstein relacionamos a energia do vácuo a constante cosmológica Λ , porém não como um termo geométrico, mas como um termo de fonte incluído no tensor energia-momento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}), \quad (2.63)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}, \quad (2.64)$$

a densidade de energia do vácuo deve ser constante, então

$$p_A = -\rho_A = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.65)$$

num Universo dominado pela energia do vácuo, a equação de Friedmann se torna

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}, \quad (2.66)$$

temos, assim, a solução para o caso inflacionário dado por

$$a(t) \propto e^{Bt}, \quad (2.67)$$

onde

$$B = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda}. \quad (2.68)$$

Entretanto em modelos com campos em estados meta-estáveis a inflação não tem fim, o que contradiz a observação.

3

Gravitação e Cosmologia em Dimensões Reduzidas

Os mecanismos básicos da interação gravitacional clássica estão contidos na teoria da Relatividade Geral e são o ponto de partida para a análise de qualquer sistema que envolva a força da gravidade. Porém, em alguns casos a complexidade técnica dos cálculos dificulta uma análise apropriada. Por outro lado a incompatibilidade da Relatividade Geral com a Mecânica Quântica é um problema em aberto [16] e o casamento destas teorias é fundamental para entender com propriedade os primeiros instantes de existência do Universo. Tendo em vista essas dificuldades diversos modelos em dimensões reduzidas (2D e 3D) foram propostos na literatura. No caso particular de 2D existe um processo de quantização consistente proposto por Polyakov nos anos 80 [1, 17, 18] no caso de 3D as suas peculiaridades geométricas dão, por exemplo, um papel importante a presença de torção [1] e abrem a possibilidade de se trabalhar com modelos escalares [6]. Neste capítulo apresentamos os elementos básicos dos modelos de gravitação em 2D e 3D além de suas aplicações em modelos cosmológicos.

3.1 Gravitação e Cosmologia em 2D

Nesta seção tratamos de modelos com uma dimensão espacial e uma temporal, isto é 2D; como foi mencionado na introdução teorias de gravitação em 2D são de importância pois servem como laboratórios teóricos e em particular servem para testar diversas idéias em modelos cosmológicos, como veremos a seguir.

Da Relatividade Geral temos as seguintes equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

que descrevem a evolução do campo gravitacional. As equações de Einstein (3.1) no entanto, não fornecem dinâmica na gravitação em duas dimensões. De fato, a ação de Einstein-Hilbert em 2D é

$$\int d^2x \sqrt{-g} R, \quad (3.2)$$

esta quando é submetida ao princípio da ação mínima produz um tensor de Einstein identicamente zero, $G_{\mu\nu} = 0$ [7].

Uma outra forma de verificar este fato é através do tensor de Riemann, que no caso bidimensional, possui apenas uma componente independente, R_{0101} , podendo então ser reduzido à fórmula

$$R_{\lambda\mu\tau\nu} = (g_{\lambda\tau}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\tau}) \frac{R_{0101}}{g}, \quad (3.3)$$

onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$. Contraindo λ e τ , obtemos o tensor de Ricci e contraindo novamente μ e ν temos o escalar de curvatura

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \frac{R_{0101}}{g}, \quad R = \frac{2R_{0101}}{g}. \quad (3.4)$$

Assim, substituindo as equações (3.4) no tensor de Einstein (3.1), obtemos

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (3.5)$$

O resultado acima mostra que a teoria de Einstein em 2D não é uma teoria de gravitação consistente, já que não fornece dinâmica para a interação gravitacional. Uma proposta

alternativa para solucionar esse problema foi apresentada por Jackiw e Teitelboim em 1985 [19], mais conhecida como teoria JT adquiriu expressivo interesse por parte dos campistas e cosmólogos nas duas últimas décadas [1–3, 16, 20–24]. Em seguida veremos os fundamentos básicos da teoria de Jackiw-Teitelboim e suas diversas aplicações em modelos cosmológicos.

3.1.1 Modelo de Jackiw-Teitelboim

A idéia básica de Jackiw e Teitelboim foi apontar que toda a informação geométrica em 2D está contida no escalar de curvatura, de modo que uma escolha natural para a equação de campo no vácuo seria $R - \Lambda = 0$, sendo Λ a constante cosmológica.

Como é sabido da literatura uma teoria de campos fundamental deve respeitar o princípio de gauge, e uma maneira de respeitá-lo é possuir uma formulação variacional. Para conseguir uma ação invariante por transformações gerais de coordenadas o modelo JT pode incorporar um campo auxiliar $\eta(x)$ de acordo com

$$S_g = \int d^2x \sqrt{-g} \eta (R - \Lambda), \quad (3.6)$$

a variação em relação a $g_{\mu\nu}$ produz uma equação de movimento para η ,

$$\eta_{;\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda g_{\mu\nu} \eta = 0. \quad (3.7)$$

e a variação em relação a η fornece a dinâmica desejada

$$R - \Lambda = 0. \quad (3.8)$$

Considerando agora a ação da matéria

$$S_m = 8\pi G \int d^2x \sqrt{-g} T, \quad (3.9)$$

onde T é o traço do tensor energia-momento da matéria, fazendo $\kappa = 8\pi G$ escrevemos a ação total,

$$S = \int d^2x \sqrt{-g} \eta (R - \Lambda + \kappa T), \quad (3.10)$$

resultando na seguinte equação de movimento

$$R = \Lambda - \kappa T, \quad (3.11)$$

que preserva a essência da noção de Einstein de que “curvatura=matéria”.

Mann em 1991 [20] utilizou a teoria JT em cenários que incluem buracos negros e física de estrelas (colapso gravitacional); em 1992 a aplicou a modelos cosmológicos, obtendo soluções para o Universo com matéria e radiação, como mostraremos a seguir [21].

Partindo da hipótese de um Universo homogêneo e isotrópico utilizamos uma métrica de Robertson-Walker em 2D

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2, \quad (3.12)$$

onde as fontes são descritas pelo TEM de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + \rho U_\mu U_\nu, \quad (3.13)$$

com a métrica (3.12) e as definições do tensor de Riemann e do símbolo de Christoffel do capítulo 1 encontramos as componentes não nulas dos símbolos de Christoffel, do tensor de Ricci e do escalar de curvatura

$$\Gamma_{11}^0 = -\dot{a}a \quad , \quad \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.14)$$

$$R_{00} = \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = -\ddot{a}a, \quad R = \frac{2\ddot{a}}{a}, \quad (3.15)$$

com esses resultados na equação (3.11) obtemos a seguinte equação de movimento

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{2} - \frac{\kappa}{2}(\rho - p), \quad (3.16)$$

e a lei de conservação do tensor energia-momento $T_{\mu\nu;\lambda} = 0$ nos fornece a equação de balanço

$$\dot{\rho} = -\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (3.17)$$

Considerando que o fluido seja descrito por uma equação de estado barotrópica $p = (\gamma - 1)\rho$ que obedece à condição $1 \leq \gamma \leq 2$, é possível obter soluções separadas para matéria e radiação ou incluir uma descrição do Universo composto por matéria e radiação com um regime de aceleração positiva desde que a condição de energia fraca ($\rho_m \geq 0$, $\rho_r \geq 0$, em que ρ_m corresponde à densidade de matéria e ρ_r de radiação) seja violada [21]. Soluções com Universo acelerado ou desacelerado e transições entre esses dois regimes foram obtidas por Devecchi e Kremer em 2002 e 2003 [2, 3, 24].

3.1.2 O Modelo CGHS

Veremos agora uma teoria de 1992 proposta por Callan, Giddings, Harwey e Strominger [25] conhecida como modelo CGHS, um parceiro natural 2D da teoria de Brans-Dicke proposta em 1961 [7]. O modelo de Callan et.al [26] foi inspirado em teoria de cordas, onde o dilaton ϕ é um campo dinâmico.

A ação toma a forma

$$S = \int d^2x \sqrt{-g} (e^{-2\phi} [R + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + J] + \kappa T), \quad (3.18)$$

onde J é o termo de fonte do dilaton.

A partir desta ação, utilizando-se o princípio variacional obtém-se duas equações de movimento, uma para as componentes da métrica e outra para o dilaton

$$e^{-2\phi} [R_{\mu\nu} - 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi] = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad R - 4(\nabla^\mu \phi)^2 + 4\nabla^2 \phi + J = 0. \quad (3.19)$$

Da suposição de Universo homogêneo e isotrópico com uma métrica de RW,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2, \quad (3.20)$$

encontramos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{2} e^{2\phi} (\rho - p) + \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} + \ddot{\phi} + \frac{\Lambda}{2}, \quad \ddot{\phi} = \frac{\kappa}{2} e^{2\phi} (\rho + p) + \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a}. \quad (3.21)$$

Nesse modelo, também é possível obter-se a transição de um período inflacionário para um período desacelerado, porém essa transição dependerá fortemente das condições iniciais do campo do dilaton.

Um outro modelo que pode ser citado é a teoria gravitacional semi-clássica proposta por Polyakov em 1981 [1]. Neste modelo a ação efetiva era obtida a partir da integração funcional sobre os campos de matéria, obtendo-se uma ação exclusivamente gravitacional. O modelo ganhou relevância na literatura por ser a primeira teoria gravitacional com uma versão quântica consistente [1].

3.1.3 Modelos em 2D com inflação e energia escura

A existência de soluções com aceleração positiva no modelo de JT dependiam, como vimos, de uma condição não usual para a densidade de energia ($\rho < 0$). Uma alternativa foi substituir a equação de estado barotrópica pela equação de van der Waals [2, 24, 27]. A equação de van der Waals foi proposta no contexto cosmológico em [28]. Esta substituição permite o aparecimento de um período inflacionário, seguido de um período dominado pela matéria.

A equação de van der Waals é um refinamento da equação de estado barotrópica quando o volume das partículas e suas interações são levados em conta no caso em que se lida com um fluido denso,

$$p = \frac{b\rho}{1 - \alpha\rho} - \beta\rho^2, \quad (3.22)$$

sendo que $\beta = 3p_c v_c^2$, $\alpha = v_c/3$ e $b = c_s^2/c^2$, onde p_c e v_c são a pressão e o volume crítico, c_s é a velocidade do som e c é a velocidade da luz. Em um contexto cosmológico pode-se desprezar o termo responsável pela interação entre as partículas e a equação de estado de van der Waals é escrita então da seguinte forma

$$p = \frac{b\rho}{1 - \alpha\rho}, \quad (3.23)$$

onde b e α são constantes. Observe que quando $\alpha \rightarrow 0$, recuperamos a equação de estado barotrópica.

Da equação de Jackiw-Teitelboim

$$R = \Lambda - \kappa T, \quad (3.24)$$

e novamente adotando uma métrica de RW da suposição de um Universo homogêneo e isotrópico

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2, \quad (3.25)$$

e o tensor energia momento de um fluido perfeito $T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + \rho U_\mu U_\nu$, temos a seguinte equação de movimento

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{2} - \frac{\kappa}{2} \left(\rho - \frac{b\rho}{1 - \alpha\rho} \right). \quad (3.26)$$

E pela lei de conservação $T_{\mu\nu;\lambda} = 0$ temos a equação

$$\dot{\rho} = -\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{b\rho}{1 - \alpha\rho} \right). \quad (3.27)$$

As soluções destas equações foram obtidas numericamente com a imposição de certas condições iniciais sobre o fator de escala cósmica $a(0)$, a velocidade do fator de escala $\dot{a}(0)$ e a densidade de energia $\rho(0)$, apresentadas na tabela abaixo. A tabela também mostra os valores dos parâmetros da equação de van der Waals e da constante cosmológica.

Condições iniciais e parâmetros da equação de vdW.		
$a(0) = 1,0$	$\dot{a}(0) = 1,0$	$\rho(0) = 1,0$
$\alpha = 0,5$	$b = 0,8; 0,9$	$\lambda = 0,002$

No gráfico da figura (3.1) está representado o comportamento da aceleração cósmica sendo regida pela equação de van der Waals, em tempos pequenos, no período inflacionário. Em tempos maiores, quando a equação de vdW começa a se aproximar da equação barotrópica o Universo passa para um período dominado pela matéria e a aceleração assume valores negativos. Uma segunda transição ocorre quando a constante cosmológica assume valores não nulos, o Universo entra num período de aceleração positiva, dominado pela energia escura (quadro menor).

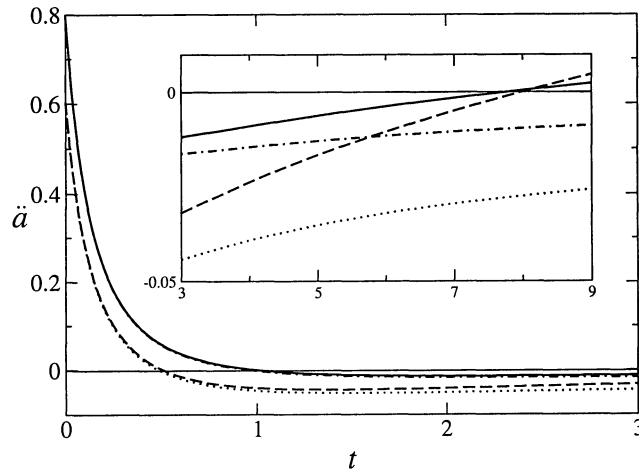


Fig. 3.1: Aceleração do fator de escala cósmica com vdW em 2D.

A curva do fator de escala aparece na figura (3.2), os parâmetros do equação de van der Waals e a presença ou não da constante cosmológica influenciam na velocidade de expansão do fator de escala podendo em alguns casos gerar até mesmo recolapso (big-crunch).

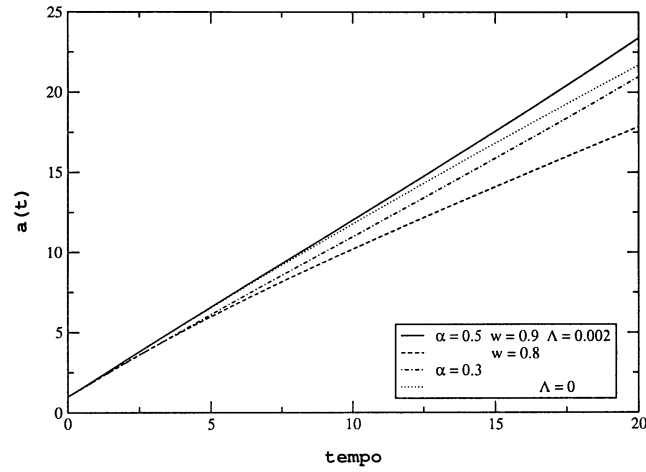


Fig. 3.2: *Evolução do fator de escala em 2D. Onde ω é o parâmetro b da equação de vdW .*

Sobre a densidade de energia do gráfico a seguir, figura (3.3), vemos um comportamento esperado, já que em qualquer uma das situações, com ou sem Λ , a densidade está decrescendo em acordo com a expansão permanente do universo 2D.

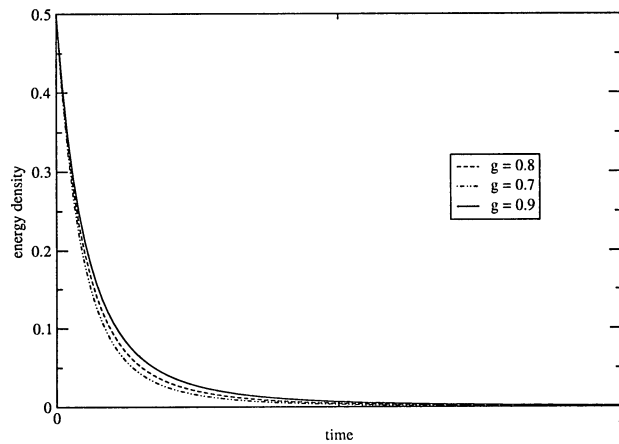


Fig. 3.3: *Evolução da densidade de energia em 2D. Onde g é o parâmetro b da equação de vdW .*

Encerramos aqui, nossa discussão sobre o modelo com inflação e energia escura a partir da teoria de JT, parceira da teoria de Einstein em 4D. Porém, ainda fazemos um comentário sobre as soluções obtidas pelo modelo CGHS com van der Waals em [2, 24]; a evolução do fator de escala cósmica e sua aceleração mostram um comportamento completamente diferente do obtido em JT, e com uma forte dependência do dilaton.

Na próxima seção falamos de teorias de gravitação em 3D e algumas de suas aplicações cosmológicas.

3.2 Gravitação e cosmologia em 3D

Num espaço-tempo tridimensional a gravitação é descrita pelas equações de Einstein com a constante gravitacional renormalizada ($G_d/(d-2) \rightarrow G_d$) para garantir a não divergência das equações de campo [6]. Então as equações são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -2\pi G_2 T_{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

Devido ao fato dos tensores de Einstein e de Riemann serem equivalentes em 3D, o espaço tempo é plano fora das fontes; isto é, não há campo gravitacional livre nem limite Newtoniano.

Podemos ver isso considerando as componentes do tensor de curvatura com apenas dois índices diferentes, $R_{\alpha\beta\alpha\beta}$. Escolhemos então o par $\alpha\beta$ de três maneiras diferentes entre os valores 0,1,2; assim pelas relações (2.19) encontramos uma única componente independente para cada par e mais três componentes independentes com três índices diferentes $R_{\alpha\beta\alpha\lambda}$, somando ao todo seis componentes independentes para esse tensor e igualmente seis componentes independentes para o tensor de Ricci, R_{ik} .

Podemos então escrever o Riemann em função de um tensor qualquer $A_{\mu\lambda}$ que obedeça as mesmas propriedades de simetria do Ricci

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = A_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} + A_{\nu\rho}g_{\mu\lambda} - A_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - A_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}, \quad (3.29)$$

contraindo λ e μ encontramos que

$$R_{\nu\rho} = g^{\lambda\mu} A_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} + g^{\lambda\mu} A_{\nu\rho} g_{\mu\lambda} - g^{\lambda\mu} A_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g^{\lambda\mu} A_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}, \quad (3.30)$$

contraindo novamente

$$R = g^{\nu\rho} g^{\lambda\mu} A_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} + g^{\nu\rho} g^{\lambda\mu} A_{\nu\rho} g_{\mu\lambda} - g^{\nu\rho} g^{\lambda\mu} A_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g^{\nu\rho} g^{\lambda\mu} A_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}, \quad (3.31)$$

então

$$A = \frac{1}{4}R \quad \Rightarrow \quad A_{\nu\rho} = R_{\nu\rho} - \frac{1}{4}R g_{\nu\rho}, \quad (3.32)$$

que substituindo na equação (3.30) produz

$$A_{\nu\rho} = R_{\nu\rho} - \frac{1}{4}R g_{\nu\rho}, \quad (3.33)$$

de tal maneira que podemos expressar todas as componentes do Riemann por meio do Ricci e do tensor métrico

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\mu\lambda} R_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} R_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho} R_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda} R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}R(g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}). \quad (3.34)$$

Uma alternativa é modificar a ação de Einstein-Hilbert acrescentando termos de ordem superior para que haja propagação,

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\alpha\beta} (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} R)^{;\nu}, \quad (3.35)$$

em que $C_{\mu\nu}$ é conhecido como tensor de Weyl [1]. Conseqüentemente temos a seguinte equação de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{1}{m} C_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

onde $\kappa = 2\pi G$. Em um espaço-tempo de N dimensões, o tensor de Riemann pode ser decomposto da seguinte forma

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{N-2} (g_{\mu\lambda} R_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} R_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho} R_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda} R_{\mu\rho}) - \frac{R}{(N-1)(N-2)} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + C_{\mu\nu\lambda\rho}, \quad (3.37)$$

onde $C_{\mu\nu\lambda\rho}$ corresponde à parte do traço nulo do tensor de Riemann. O número de componentes independentes depende da dimensão do espaço-tempo, N ,

$$C_N = \frac{N^2}{12} (N^2 - 1), \quad (3.38)$$

e para o tensor de Ricci

$$R_N = \frac{1}{2}N(N+1), \quad (3.39)$$

de maneira que para $N = 3$ temos $C_3 = R_3 = 6$ e neste caso $C_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$. Novamente temos o tensor de Riemann escrito completamente em função do Ricci [7]. Em geral quando não há fontes a curvatura depende exclusivamente do tensor de Weyl. Calculando $C^{\mu\nu}$ para uma métrica de RW, que obedeça ao princípio cosmológico, obtemos $C^{\mu\nu} = 0$ e neste caso as equações de campo recaem novamente nas equações de Einstein [1].

Vejamos o que acontece quando inclui-se uma constante cosmológica. As equações de Einstein são escritas então da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.40)$$

onde $\kappa = 2\pi G_2$, que escrito em função do Ricci fica

$$R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu} - \kappa(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T), \quad (3.41)$$

substituído esta equação no tensor de Riemann (3.34) obtemos

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \kappa[g_{\mu\rho}T_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}T_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}T_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}T_{\mu\lambda} + T(g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho})] + \Lambda(g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}). \quad (3.42)$$

No vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$) e a equação anterior fica

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \Lambda(g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}), \quad (3.43)$$

assim a curvatura será positiva se $\Lambda > 0$, negativa se $\Lambda < 0$ e zero se $\Lambda = 0$.

3.2.1 Soluções Cosmológicas Estáticas e Esféricas

Vamos supor que o Universo seja constituído por um fluido em repouso onde a densidade é em todo o lugar a mesma. A pressão do fluido também é considerada constante já que o fluido é em todo lugar o mesmo.

Utilizando uma métrica estática e circularmente simétrica dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2, \quad (3.44)$$

com as seguintes equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa[(\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}], \quad (3.45)$$

obtemos

$$\kappa\rho = \frac{e^{2\lambda(r)}\lambda'}{r}, \quad \kappa p = \frac{e^{2\lambda(r)}\nu'}{r}. \quad (3.46)$$

E por integração

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{\kappa}{\pi}M(r) \quad (3.47)$$

onde $M(r) = \int 2\pi\rho(r)rdr$ e $\nu' = \kappa pr/(1 - (\kappa/\pi)M)$ e a constante ν' é escolhida para que a origem faça parte do espaço-tempo.

Para uma fonte pontual $\rho = M\delta(r)$ e $p = 0$, temos

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{\kappa}{\pi}M(r), \quad \nu' = 0 \quad \rightarrow \quad \nu = 0. \quad (3.48)$$

Encontramos então o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\kappa}{\pi}M(r)}dr^2 - r^2d\theta^2. \quad (3.49)$$

Para preservar o sinal impomos que $M \leq \frac{\pi}{\kappa}$. Uma mudança de coordenadas revela que o espaço é plano exceto por uma singularidade na fonte, em $r=0$,

$$x = \left(\frac{1}{1 - \kappa \frac{M}{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} r \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad (3.50)$$

$$\phi = \left(1 - \kappa \frac{M}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \left(1 - \kappa \frac{M}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.51)$$

temos então que

$$d\theta^2 = \left(\frac{1}{1 - \kappa \frac{M}{\pi}} \right) d\phi^2, \quad dr^2 = \left(1 - \kappa \frac{M}{\pi} \right) dx^2, \quad (3.52)$$

de modo que o novo elemento de linha será

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - x^2d\phi^2. \quad (3.53)$$

A restrição imposta sobre o ângulo ϕ , que varia entre 0 e $2\pi\sqrt{1 - \kappa M/\pi}$, mostra que a parte espacial possui a geometria de um cone.

3.2.2 Soluções Cosmológicas Não-Estáticas

Obtemos as soluções cosmológicas considerando um Universo homogêneo e isotrópico com um fator de escala variável no tempo tal que o elemento de linha possa ser descrito por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 \right). \quad (3.54)$$

Calculamos os símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura considerando o lado esquerdo das equações de Einstein (3.36) para a métrica (3.54)

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^0 = a\dot{a}, \quad \Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad (3.55)$$

$$R_{00} = 2\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a}(\ddot{a} + \dot{a}^2), \quad R = 2\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2}, \quad (3.56)$$

e as componentes não nulas do tensor de Einstein

$$G_{00} = -\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \quad G_{ii} = \frac{g_{ii}}{a}\ddot{a}, \quad i = 1, 2. \quad (3.57)$$

Resolvendo as equações de campo (3.36) encontramos

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \kappa\rho, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa p. \quad (3.58)$$

e pela lei de conservação $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ no referencial comóvel temos

$$\dot{\rho} + 2H(p + \rho) = 0, \quad (3.59)$$

note que pela equação (3.58) um regime de aceleração positiva é possível com a quebra da condição de energia forte ($p > 0$, para o caso 3D) [29].

3.2.3 Limite Newtoniano e a Teoria $R = \kappa T$ em 2+1 dimensões

Um ponto importante na discussão da gravitação 3D é o limite Newtoniano. No limite de baixas velocidades com campos fracos e estáticos não há um limite Newtoniano como em 4D, pois em 3D a relação das fontes com o campo leva a equação de Laplace. Vejamos a justificativa a seguir.

O primeiro passo é obter as equações de campo de Einstein pela aproximação de campo fraco. Nós assumimos que o campo é estático e a velocidade das partículas é muito menor que a da luz, tal que

$$\frac{\Phi}{c^2} \ll 1, \quad g_{\alpha\beta,0} = 0, \quad \beta^k \equiv \frac{v^k}{c} \ll 1, \quad k = 1, 2. \quad (3.60)$$

onde Φ é o potencial gravitacional.

A equação de movimento de uma partícula com energia potencial $U = m\bar{\theta}$, onde m é a massa e $\bar{\theta}$ é o potencial gravitacional Newtoniano, toma a forma

$$\bar{\theta}_k = -m \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}, \quad (3.61)$$

uma vez que a pressão é muito menor que a densidade de energia da fonte ($p \ll \rho$) a única componente do tensor energia-momento que não desaparece é $T_{00} = \rho$, portanto $T_{ij} = 0$, com o tensor de Ricci

$$R_{00} = -\Gamma_{00,i}^i = -\nabla^2 \Phi, \quad (3.62)$$

que substituindo nas equações de Einstein produz

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (3.63)$$

que mostra explicitamente o desacoplamento entre o potencial gravitacional Φ e as fontes. Portanto o modelo carece de limite Newtoniano.

Por outro lado, um limite Newtoniano pode ser encontrado se substituirmos a gravitação de Einstein pelo modelo escalar proposto por Cornish e Frankel [6]. Uma maneira de mostrar que neste modelo existe um limite Newtoniano é utilizar a chamada métrica conformalmente plana [1]:

$$g_{\mu\nu} = \Phi^2(r) \eta_{\mu\nu} \approx (1 + 2\theta) \eta_{\mu\nu} = [1 + 2\epsilon\theta(r)] \eta_{\mu\nu}, \quad (3.64)$$

onde utilizamos novamente uma aproximação de campo fraco em primeira ordem de ϵ . O escalar de curvatura é neste caso

$$R = -4\epsilon \frac{d^2}{dr^2} \theta. \quad (3.65)$$

No limite de campos fracos temos também $T \approx \rho$, assim se queremos o limite Newtoniano com uma força gravitacional atrativa devemos usar

$$R = -\kappa T, \quad (3.66)$$

e assim garantimos a equação esperada $\nabla^2 \bar{\theta} = \kappa \rho$. A equação (3.66) é a proposta de modelo escalar gravitacional de Cornish e Frankel [6]. Nesse trabalho diversas das suas soluções cosmológicas foram analisadas. O ponto de partida é novamente a hipótese de homogeneidade e isotropia do Universo 3D representada pela métrica de R-W,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 \right), \quad (3.67)$$

Assim as equações de movimento são dados por

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = 4\pi G(2p - \rho), \quad (3.68)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho a^2) + p \frac{d}{dt}(a^2) = 0. \quad (3.69)$$

As soluções destas equações foram analisadas por Cornish e Frankel. O caso analisado nesse trabalho foi considerar um constituinte em períodos dominados por radiação ou matéria. O modelo forneceu resultados consistentes [6].

3.2.4 Modelo com inflação e energia escura em 3D

Apresentamos aqui brevemente alguns resultados obtidos para um Universo com inflação em um modelo escalar inspirado na dinâmica de Einstein 3D [28], onde é utilizada a teoria cinética dos gases relativísticos e dois constituintes a matéria e um campo escalar, que simula a presença do inflaton para um Universo jovem e a energia escura para um Universo velho.

No modelo de Einstein 3D as equações de campo são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.70)$$

a homogeneidade e isotropia é representada pela métrica de Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2[dr^2 + r^2 d\theta^2]. \quad (3.71)$$

As fontes do campo gravitacional podem ser vistas como um fluido fora do equilíbrio onde a interação entre os constituintes se dá através de um termo de pressão dinâmica no tensor energia-momento das fontes. O tensor energia-momento correspondente é então

$$T^{\mu\nu} = \left(\sum_i [\rho_i + p_i] + \varpi \right) U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu} \left(\sum_i p_i + \varpi \right), \quad (3.72)$$

onde ρ_i e p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são a densidade de energia e a pressão hidrostática das fontes, respectivamente e ϖ é a pressão dinâmica, relacionada a viscosidade do fluido cosmológico.

O tensor energia-momento satisfaz a lei de conservação $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$, que num referencial comóvel produz

$$\sum_i \dot{\rho}_i + 2 \frac{\dot{a}}{a} \left\{ \sum_i [\rho_i + p_i] + \varpi \right\} = 0. \quad (3.73)$$

Das equações de Einstein (3.70), da métrica (3.71) e das definições do capítulo um, encontramos as seguintes equações de movimento

$$H^2 = \kappa \sum_i \rho_i \quad , \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa \left(\sum_i p_i + \varpi \right). \quad (3.74)$$

onde H é o parâmetro de Hubble.

Para o caso da energia escura as fontes podem ser modeladas por um campo escalar (ϕ). Isso torna necessário escrever a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo curvo

$$\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi} = -V'(\phi) \quad (3.75)$$

onde V é o potencial e ϕ depende exclusivamente do tempo. Tomando o caso particular da lei de conservação de energia e momento pode-se separar em duas relações independentes. Assim o sistema de equações pode ser escrito como

$$H^2 = \kappa(\rho_m + \rho_\phi) \quad , \quad \dot{H} + H^2 = -(p_m + p_\phi + \varpi), \quad (3.76)$$

$$\dot{\rho}_m + 2H(\rho_m + p_m + \varpi) = 0 \quad , \quad \dot{\rho}_\phi + 2H(\rho_\phi + p_\phi) = 0. \quad (3.77)$$

O comportamento dos constituintes é regido por

$$p_m = (\gamma - 1)\rho_m \quad , \quad p_\phi = (\nu - 1)\rho_\phi, \quad (3.78)$$

$$\varpi = -\alpha(\rho_m + \rho_\phi)\Theta \quad , \quad (\Theta = \nabla^\mu U_\mu = 2H), \quad (3.79)$$

onde α é um parâmetro de viscosidade. A combinação destas expressões produz o seguinte sistema

$$\rho_m = \left(1 + \frac{\rho_m^0}{\rho_\phi^0}\right) H^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^{2\nu} \quad , \quad \rho_\phi = \left(\frac{1}{a}\right)^{2\nu} \quad , \quad (3.80)$$

$$\dot{H} = (2\alpha H - \lambda)H^2 + \frac{\lambda - \nu}{1 + \rho_m^0/\rho_\phi^0} \left(\frac{1}{a}\right)^{2\nu} \quad , \quad (3.81)$$

onde ρ_m^0/ρ_ϕ^0 é a razão entre as densidades de energia em $t=0$. A tabela a seguir mostra os valores das condições iniciais e os parâmetros da equação de estado.

$a(0)$	1,0
$\dot{a}(0)$	1,0
$r = \rho_m^0/\rho_\phi^0$	$0 < r < 0,5$
viscosidade	$0 < \alpha < 1$
equação de estado da matéria	$1 < \gamma < 2$
equação de estado do inflaton	$0 < \nu < 1$

Os resultados da análise numérica do sistema (3.79-3.81) podem ser observados nos gráficos a seguir.

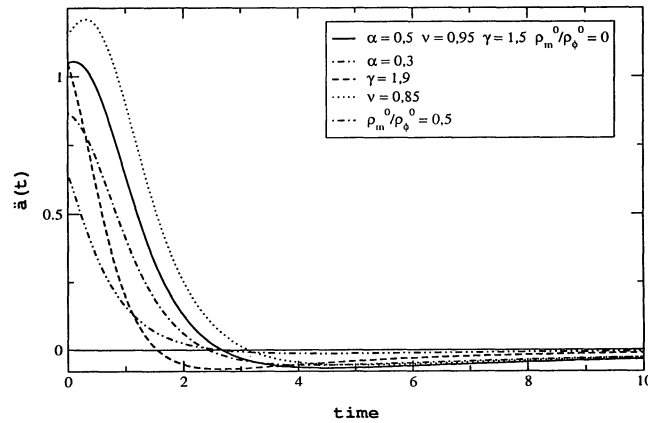


Fig. 3.4: Comportamento da aceleração durante a inflação para diferentes parâmetros

A figura (3.4) mostra uma transição para parâmetros com valores típicos logo após um regime de aceleração exponencial no período da inflação para um regime de desaceleração

no início do período da matéria. Os resultados mostram que dados valores pequenos para o parâmetro α a transição é mais lenta. Com um acréscimo na razão entre as densidades de energia para $t = 0$ a transição para o regime desacelerado também é mais lenta.

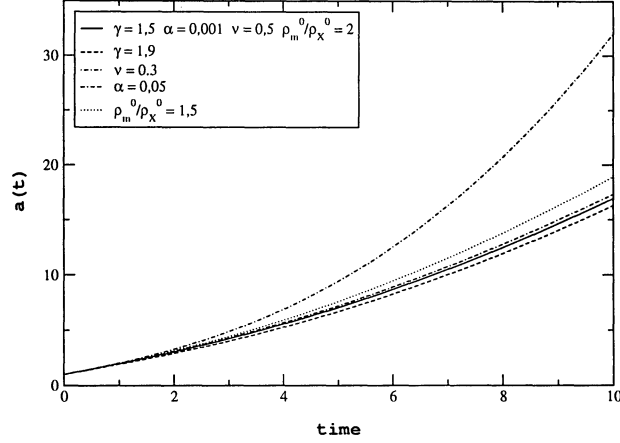


Fig. 3.5: *Evolução no tempo do fator de escala $a(t)$.*

A figura (3.5) apresenta o comportamento do fator de escala durante o período de inflação, o aumento da viscosidade α implica numa expansão mais rápida. Por outro lado valores grandes de γ e ν , das equações de estado, fornecem uma expansão mais lenta. Com o aumento do quociente dado por r a expansão é novamente lenta.

A figura (3.6) mostra a evolução temporal das densidades de energia. A representação de ρ_ϕ está numa escala logarítmica. Com o passar do tempo a matéria começa a predominar em detrimento do inflaton de acordo com a transição do gráfico da figura (3.4). Observe que o quociente ρ_m^0/ρ_ϕ^0 é essencial para a classificação das transições, para tempos pequenos há uma clara predominância da energia do inflaton. Mas para o caso da energia escura ocorre o oposto da situação inicial, isto é fundamental para se obter a transição entre o período inicial de desaceleração para o período final de aceleração.

No próximo capítulo apresentaremos modelos escalares em 2D e 3D com transição de regimes de aceleração utilizando termos não lineares do escalar de curvatura nas dinâmicas de JT em 2D e modelos escalares em 3D.

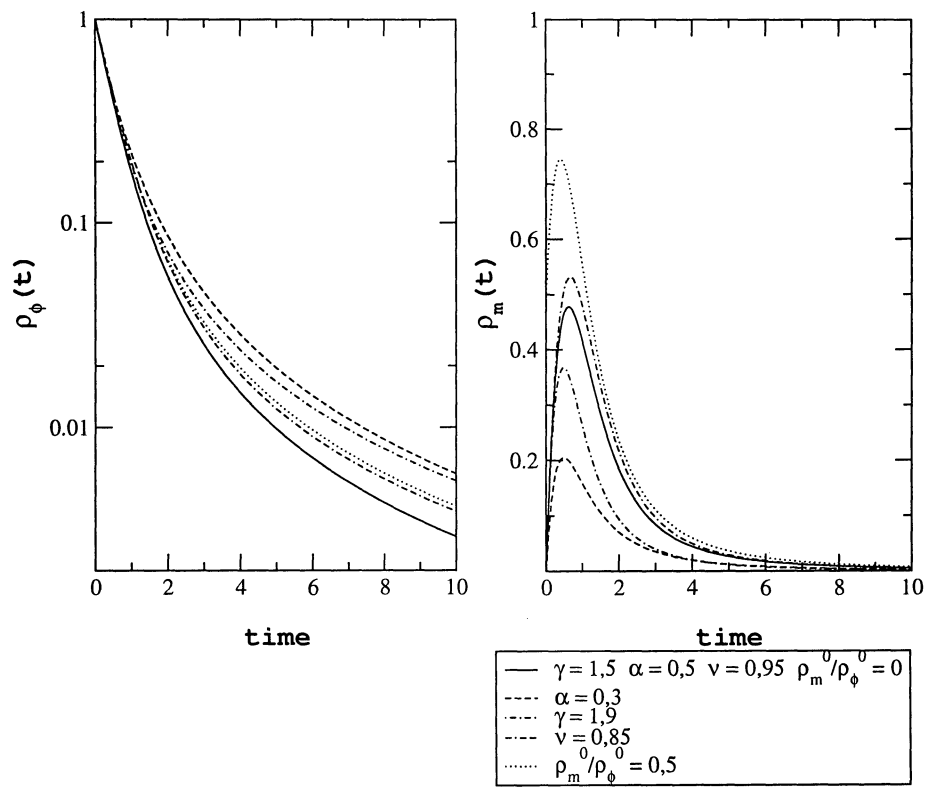


Fig. 3.6: *Evolução no tempo das densidades de energia do campo escalar e da matéria.*

4

Cosmologias $1/R$

Foi proposta recentemente na literatura [4, 5] uma formulação geométrica para a contribuição da energia escura na evolução de universos 4D. A idéia básica é adicionar um termo não linear do escalar de curvatura nas equações de Einstein e substituir a variação de Einstein-Hilbert pela de Palatini. Obtendo desse modo equações de segunda ordem. A contribuição do termo não-linear se torna importante para tempos grandes e pode ser qualitativamente associada ao domínio da energia escura no universo atual, adjudicando a essa energia escura um caráter geométrico, ao contrário das formulações usuais onde esse constituinte é enxergado como uma partícula hipotética (classicamente enxergado como um campo) ou regido por uma equação de estado exótica (como no caso da equação de Chaplygin). Estes resultados inspiram a investigação de correções não lineares para modelos cosmológicos em dimensões reduzidas e de sua interpretação. Apresentamos neste capítulo diferentes análises de modelos cosmológicos 2D e 3D que incluem um termo $1/R$ na sua dinâmica e identificamos em que casos a contribuição não-linear pode ser associada à presença da energia escura entre os constituintes de universos 2D e 3D.

4.1 Modelo $1/R$ em 4D

Nesta seção apresentamos uma alternativa proposta por [4] para a descrição do comportamento da energia escura. A idéia é introduzir uma correção nas equações de Einstein, considerando-se que a curvatura é pequena em largas escalas.

As equações de campo seguem da variação da ação

$$S = \int \left(-\frac{1}{2\kappa} L(R) + L_M \right) \sqrt{g} \, d^4x, \quad (4.1)$$

onde $\kappa = 8\pi G$ e L_M é a Lagrangeana da matéria. Considera-se uma variação de Palatini para a ação, onde $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ são tratadas como variáveis independentes.

Variando funcionalmente a ação em relação a $g_{\mu\nu}$, temos

$$L'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}L(R)g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Contraindo a equação anterior, obtemos

$$RL'(R) - 2L(R) = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Variando a ação em relação a $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, ganhamos

$$\nabla_\alpha [L' \sqrt{g} g^{\mu\nu}] - \frac{1}{2} \nabla_\sigma [L' \sqrt{g} g^{\sigma\nu}] \delta_\alpha^\mu = 0. \quad (4.4)$$

Contraindo sobre α e μ , temos

$$\nabla_\alpha [L' \sqrt{g} g^{\mu\mu}] = 0. \quad (4.5)$$

Agora considere a Lagrangeana

$$L(R) = R - \frac{\alpha^2}{3R}, \quad (4.6)$$

onde α é um constante positiva com as mesmas dimensões de R e o fator 3 foi introduzido para simplificar futuras equações.

As equações de campo para esta Lagrangeana são

$$\left(R - \frac{\alpha^2}{3R} \right) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(R - \frac{\alpha^2}{3R} \right) g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Contraindo os índices, encontramos

$$R^2 - \kappa T R = -\alpha^2 = 0 \quad (4.8)$$

e a solução desta equação algébrica é

$$R = \frac{1}{2} \left(\kappa T \pm \sqrt{\kappa^2 T^2 + \alpha^2} \right). \quad (4.9)$$

Para $|T|$ grande a equação acima se reduz a $R = \kappa T$, que segue das equações de Einstein. Assim, se $T > 0$ seleciona-se o sinal positivo da raiz e se $T < 0$, o sinal negativo. Em tempos grandes, como $T^{\mu\nu} \rightarrow 0$, o universo se expande de forma acelerada. O termo $1/R$ foi introduzido para substituir os campos escalares, constantes cosmológicas ou equação de estado barotrópica na dinâmica de Universo com energia escura.

4.2 Modelos $1/R$ em 2D

Nesta seção estudamos os modelos cosmológicos em 2D, com a inclusão de um termo $1/R$ na dinâmica, partindo do modelo JT apresentado no capítulo 2.

A contribuição não-linear do escalar de curvatura na dinâmica é controlada por um parâmetro ω . A equação de movimento do campo gravitacional é dada por

$$R - \frac{\omega^2}{R} + \kappa T = 0, \quad (4.10)$$

onde κ é a constante de acoplamento gravitacional em 2D. É importante mencionar que o termo $1/R$ adicionado diretamente nas equações de movimento não viola o princípio de gauge pois este termo é um invariante por transformações gerais de coordenadas (que representa o grupo de gauge da gravitação). De fato, R é um invariante por TGC. Podemos afirmar também que a inclusão dessa correção poderia ser feita via princípio variacional, analogamente aos procedimentos usados no modelo JT [1], com vistas a uma versão quântica do modelo.

A equação acima é algébrica em R , e pode ser resolvida usando a fórmula de Baskara

$$R = \frac{-\kappa T \pm \sqrt{\kappa^2 T^2 + 4\omega^2}}{2}. \quad (4.11)$$

No contexto cosmológico as hipóteses de homogeneidade e isotropia estão embutidas na métrica de Robertson-Walker em 2D,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2, \quad (4.12)$$

substituindo o traço do TEM de um fluido perfeito em 2D

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu, \quad (4.13)$$

obtemos $(\rho - p)$ e a lei de conservação correspondente, de acordo com que vimos no capítulo 2, $T_{\mu\nu;\lambda} = 0$ obtemos as seguintes equações dinâmicas,

$$\frac{2\ddot{a}}{a} = \frac{-\kappa(\rho - p) \pm \sqrt{\kappa^2(\rho - p)^2 + 4\omega^2}}{2}, \quad \dot{a}(\rho + p) + a\dot{\rho} = 0. \quad (4.14)$$

Onde o constituinte das fontes é regido pela equação de estado de van der Waals, apresentada no capítulo anterior

$$p = \frac{b\rho}{1 - \alpha\rho}. \quad (4.15)$$

O sistema de equações diferenciais (4.14), é um sistema não linear que pode ser resolvido numericamente. As seguintes condições iniciais normalizadas, foram usadas: $a(0) = 1$, $\dot{a}(0) = 1$ e $\rho(0) = 1$. Estas condições simulam um Universo 2D jovem, no começo do período inflacionário.

Na figura (4.1) apresentamos a evolução temporal do fator de escala $a(t)$ no período inflacionário para diferentes valores dos parâmetros. As curvas mostram, invariavelmente, uma expansão eterna. Os resultados mostram que neste período a presença do termo não-linear não altera qualitativamente a expansão do Universo 2D (observe que somente a variação em b modificou a curva, as curvas com variações em ω ficaram sobrepostas) pois o traço do TEM torna desprezível a contribuição do termo em ω (vide equação (4.11)). Este fato é um primeiro indicativo de que o termo seja um candidato para a descrição do comportamento da energia escura 2D (que deve se tornar importante para tempos grandes). Com a modificação do parâmetro b e α dos valores da equação de van der Waals a expansão se torna gradativamente mais lenta na medida em que b ou α é aumentado. Portanto, em resumo, no

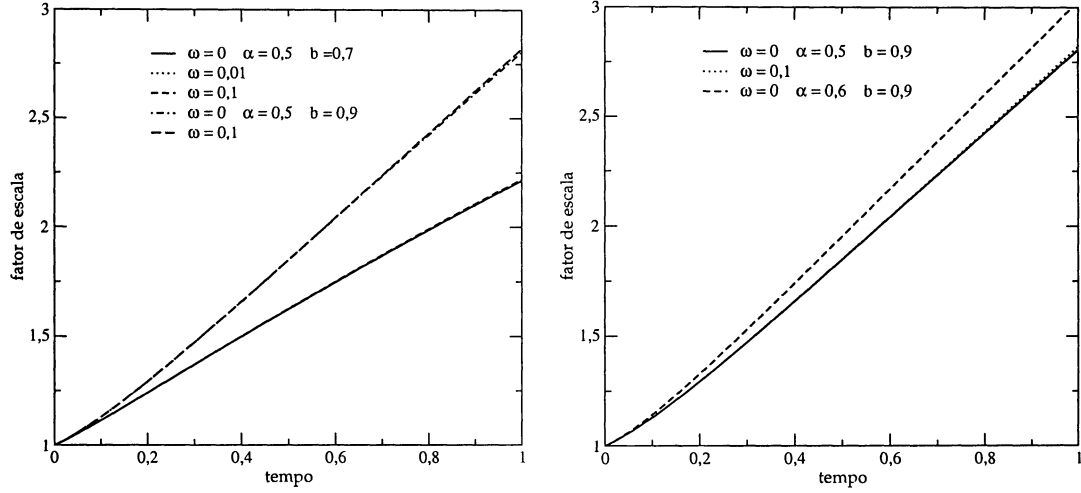


Figura 4.1: *Evolução do fator de escala, modelo não-linear 2D, período inflacionário.*

caso do Universo 2D jovem a dinâmica acaba sendo, em excelente aproximação, regida pelo modelo JT com um constituinte de van der Waals (ver capítulo 2).

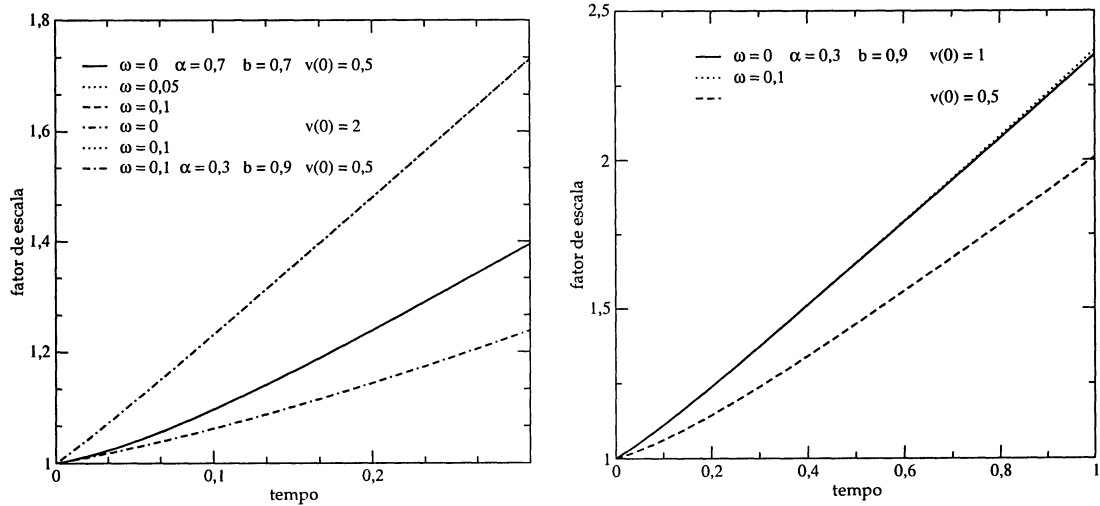


Figura 4.2: *Evolução do fator de escala, modelo não-linear 2D, período inflacionário.*

Na figura (4.2) a variação é feita sobre as condições iniciais. O aumento da velocidade proporciona uma expansão mais rápida, por outro lado se fixarmos esse valor e diminuirmos b aumentando α , simultaneamente, a expansão torna-se mais lenta.

Na figura (4.3) está representado o comportamento da densidade de energia com o

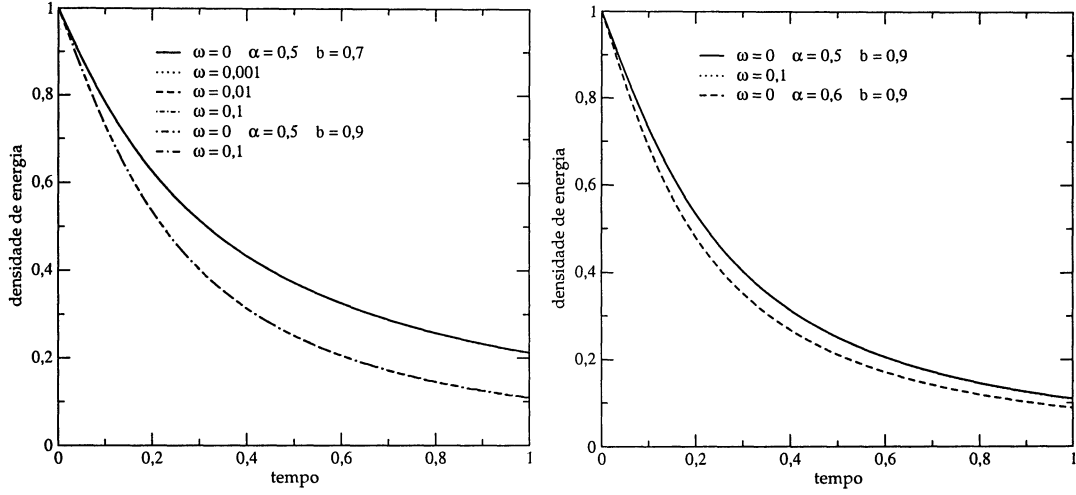


Figura 4.3: *Evolução da densidade de energia, modelo não-linear 2D, período inflacionário.*

passar do tempo. Os resultados mostram neste caso que o aumento do parâmetro b ou α faz com que a queda da densidade de energia seja mais rápida. Estes resultados estão de acordo com os obtidos no caso do fator de escala. A relação entre a densidade $\rho(t)$ e o fator de escala $a(t)$ é simples pelo fato de que neste modelo é considerado apenas um constituinte. Notem que novamente as curvas com ω não nulo estão sobrepostas.

Um ponto fundamental é, para os nossos propósitos, investigar o comportamento da aceleração $\ddot{a}(t)$. Os resultados numéricos obtidos se encontram na figura (4.4) e (4.5).

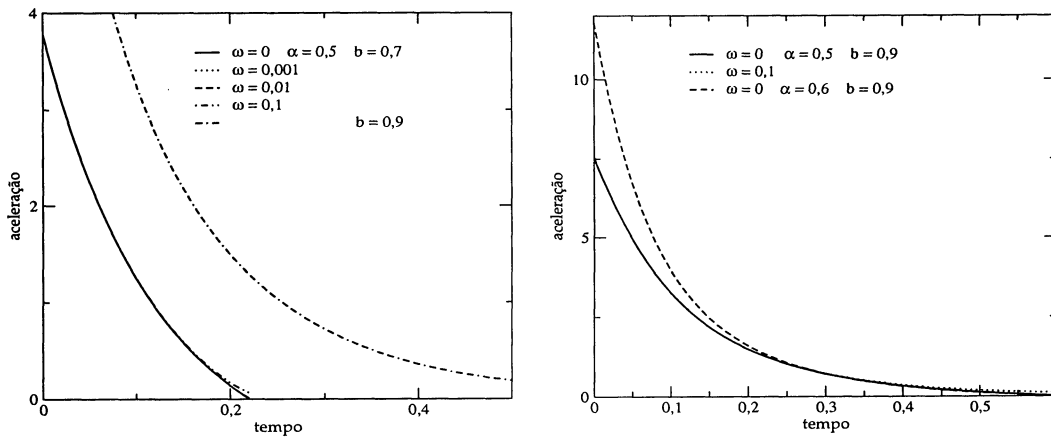


Figura 4.4: *Aceleração, modelo não-linear 2D, período inflacionário.*

Em primeiro lugar, figura (4.4), modificações em ω não alteraram qualitativamente o comportamento da aceleração (a curva pontilhada e a curva tracejada estão sob a curva cheia). Por outro lado o aumento de b incrementa o valor da aceleração inicial e torna a sua aproximação de zero mais lenta. Finalmente para α maior o valor da aceleração inicial sobe mas o tempo de queda não é qualitativamente modificado.

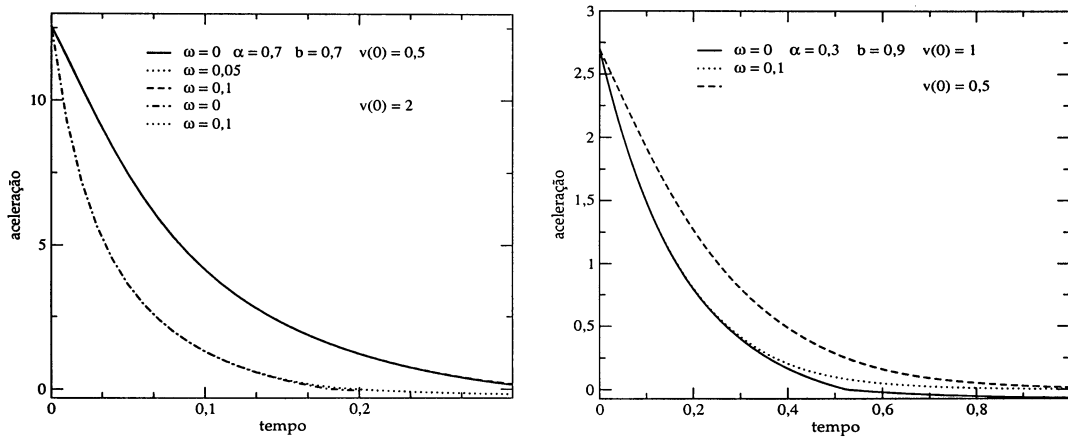
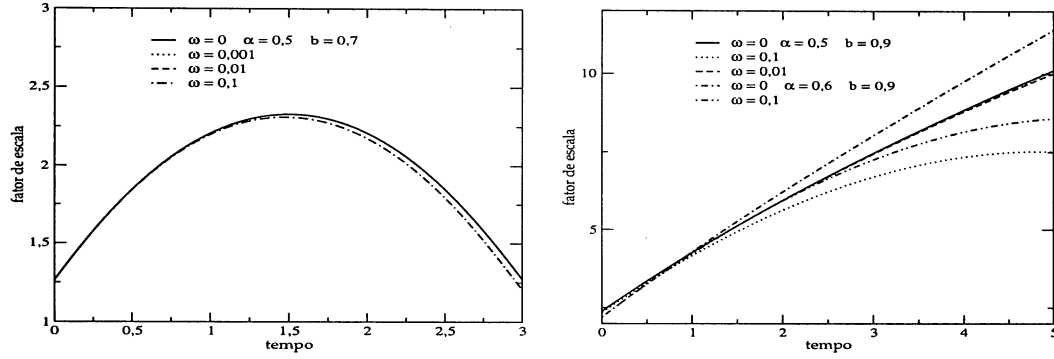


Figura 4.5: Aceleração, modelo não-linear 2D, período inflacionário.

Por outro lado queremos observar o comportamento do modelo com mudanças nas condições iniciais. Observamos que o aumento da velocidade inicial torna o tempo de queda menor pois $\ddot{a}(t)$ se aproxima de zero mais rapidamente, figura (4.5). Outras observações, que não aparecem na figura, foram feitas. Verificamos que a melhor variação é feita sob o fator de escala inicial; pois sobre a densidade de energia inicial ou sobre a velocidade inicial implica sempre num universo mais oscilatório.

Estes são os resultados para tempos pequenos, do período inflacionário. Agora veremos os resultados para tempos grandes, período de domínio da matéria.

Na figura (4.6) está representado o comportamento do fator de escala. Na figura (a) foram utilizadas as seguintes condições iniciais: $a(0) = 1,264$; $\dot{a}(0) = 1,288$ e $\rho(0) = 0,61$; Pode-se observar que o recolapso do fator de escala acontece antes quando ω aumenta. Embora não esteja ilustrado no gráfico, o aumento no valor de b atrasa o recolapso. O gráfico da figura (b) apresenta novos valores para a equação de vdW onde as condições iniciais, de

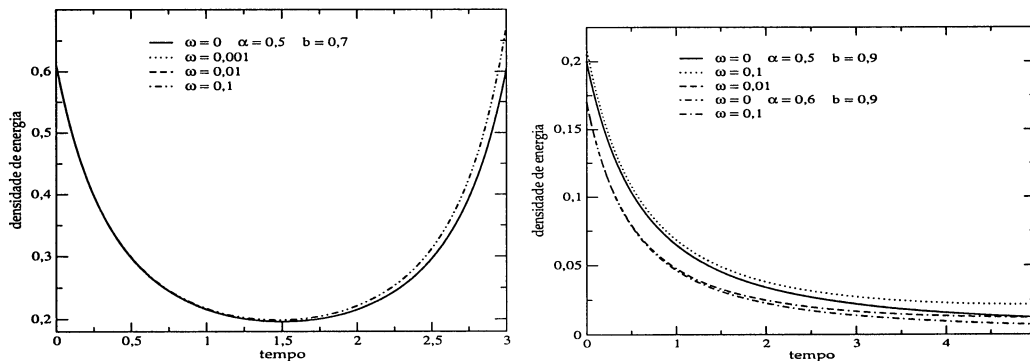


(a) C.I.: $a_0 = 1,264$; $\dot{a}_0 = 1,288$; $\rho_0 = 0,61$.

(b) C.I.: $a(0) = 2,4$; $\dot{a}(0) = 1,92$; $\rho(0) = 0,2$.

Figura 4.6: *Evolução do fator de escala, Universo 2D, domínio da matéria.*

acordo com os valores no final do período de inflação, são: $a(0) = 2,4$; $\dot{a}(0) = 1,92$ e $\rho(0) = 0,2$. O aumento do valor de α indica colapso em tempos posteriores (observem a linha cheia e a linha com um traço e um ponto). Podemos reafirmar a antecipação do recolapso com a presença de ω . Notem como isso se torna evidente comparando a linha com um traço e um ponto, que poderia representar um Universo em expansão eterna. E a linha com um traço e dois pontos que representa, sem dúvida, um Universo com recolapso.



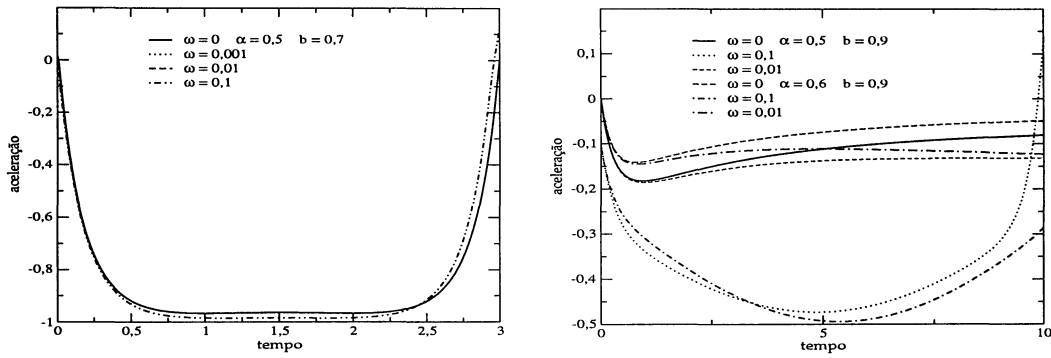
(a) C.I.: $a_0 = 1,264$; $\dot{a}_0 = 1,288$; $\rho_0 = 0,61$.

(b) C.I.: $a(0) = 2,4$; $\dot{a}(0) = 1,92$; $\rho(0) = 0,2$.

Figura 4.7: *Evolução da densidade de energia, Universo 2D, domínio da matéria.*

A figura (4.7) mostra o comportamento da densidade de energia, as condições iniciais são as mesmas dos gráficos anteriores. Na figura (a) a densidade começa decrescendo mas logo

em seguida volta a subir, de acordo com o recolapso obtido pelo fator de escala. Podemos ver que o aumento de ω , como era de se esperar, torna esse intervalo de tempo menor. No gráfico da figura (b) o aumento de α provocou uma queda na densidade de energia inicial (linha cheia e linha com um traço e um ponto). Valores de ω abaixo de 0,05 não produzem modificações (a linha tracejada está sob a linha cheia). No entanto, vejamos como um ω suficientemente grande aumenta a densidade de energia final (linha cheia e linha pontilhada).



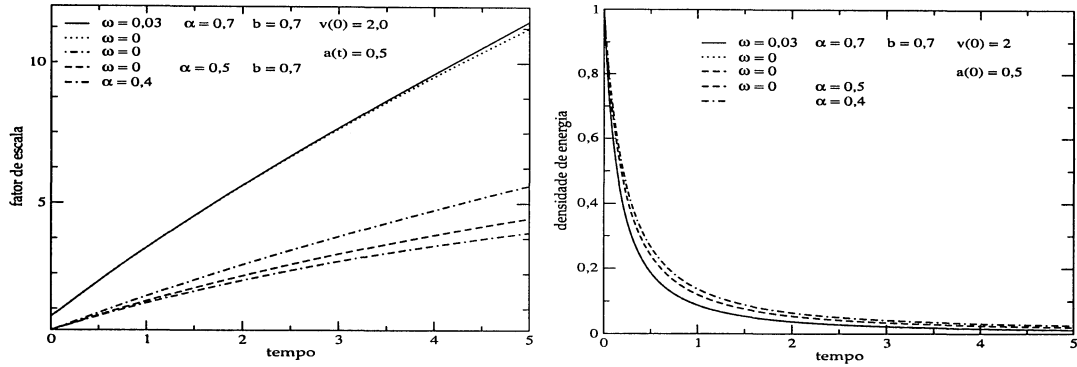
(a) C.I.: $a_0 = 1,264$; $\dot{a}_0 = 1,288$; $\rho_0 = 0,61$.

(b) C.I.: $a(0) = 2,4$; $\dot{a}(0) = 1,92$; $\rho(0) = 0,2$.

Figura 4.8: *Evolução da aceleração, Universo 2D, domínio da matéria.*

Na figura (4.8) está representado o comportamento da aceleração com as condições iniciais da figura (4.6). Como estamos representando o período dominado pela matéria a aceleração é negativa. O gráfico da figura (a) indica um intervalo muito pequeno para esse período em desacordo com a realidade; todavia, o termo não-linear torna possível a transição para um período de domínio da energia escura (linha cheia e linha com um traço e dois pontos). Na figura (b) o aumento de α aproxima a curva de zero (linha cheia e linha tracejada), ω torna a desaceleração maior e é responsável pela segunda transição (linha cheia e linha pontilhada).

Como último caso consideramos a situação em que o modelo não apresenta limite de JT. Nesta situação a escolha da raiz da equação de segundo grau (4.10) não está condicionada ao sinal do traço do tensor de energia-momento T . Nos gráficos (4.9)-(4.13) são apresentados os resultados para o fator de escala, a densidade de energia e a aceleração.



(a) C.I.: $a_0 = 1,0e0,5$; $\dot{a}_0 = 2,0e1,0$; $\rho_0 = 1,0$.

(b) C.I.: $a_0 = 1,0e0,5$; $\dot{a}_0 = 2,0e1,0$; $\rho_0 = 1,0$.

Figura 4.9: *Evolução do fator de escala e da densidade de energia.*

Na figura (4.9), gráfico *a*, está representado o comportamento do fator de escala. Vemos que a expansão é eterna e que o fator de escala começa a crescer mais rápido, em tempos grandes, com a utilização do termo não-linear (linha cheia e linha pontilhada). O decréscimo no valor de α faz com que a expansão se torne mais lenta, abaixo de 0,4 o Universo começa a apresentar colapso (linha tracejada e linha com dois traços e um ponto). No gráfico *b*, vemos que a densidade de energia não é alterada qualitativamente com a inclusão do termo não-linear (a linha pontilhada se encontra sob a linha cheia). No entanto, se diminuirmos α a queda se torna mais lenta.

Finalmente no caso da aceleração aparece o resultado mais importante. O gráfico *a* da figura (4.10) mostra que o universo possui um regime de três eras onde o termo não-linear é responsável pela segunda transição (linha pontilhada e linha tracejada). No gráfico *b* a redução do valor de α diminui o valor da aceleração inicial e o período de desaceleração é maior. Embora não esteja representado no gráfico, notamos que quando α é inferior a 0,4 a aceleração é sempre negativa e o retorno para valores positivos, com ω diferente de zero, é muito drástico. Por outro lado, se aumentamos muito o valor de b a aceleração começa com valores mais altos e para valores próximos de 0,9 a aceleração assume apenas valores positivos.

Por outro lado queremos observar o comportamento do modelo com mudanças nas

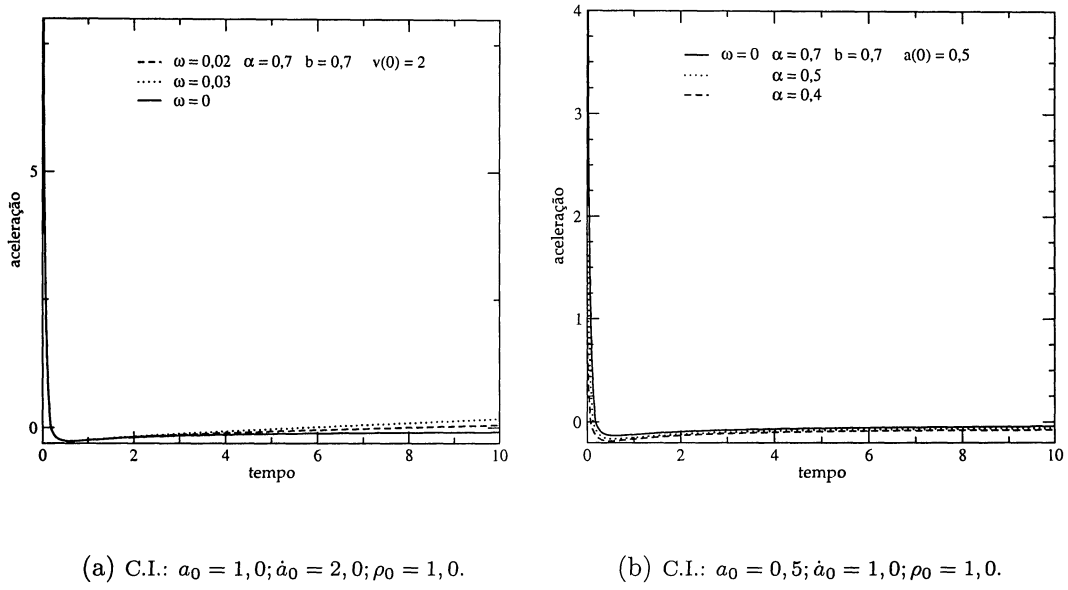


Figura 4.10: *Evolução da aceleração.*

condições iniciais. Na figura (4.11), partimos do fato de que para as condições iniciais normalizadas ($\dot{a}(0) = 1$, $a(0) = 1$, $\rho(0) = 1$) ocorre recolapso, assim utilizamos um valor diferente para a velocidade $\dot{a}(t)$ nos gráficos anteriores, agora retornamos ao valor normalizado $\dot{a}(0) = 1$ e variamos $a(0)$ ou $\rho(0)$.

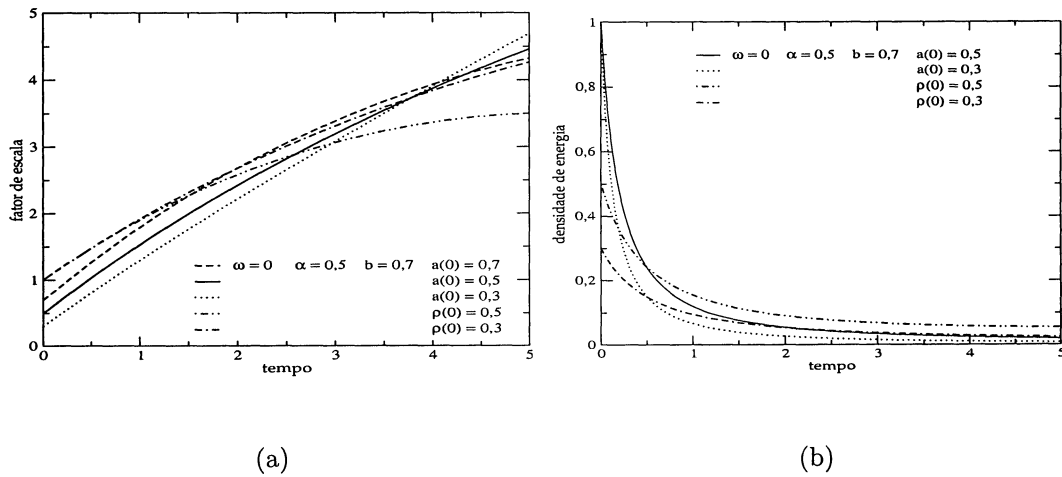


Figura 4.11: *Evolução do fator de escala e da densidade de energia.*

Vemos que no gráfico do fator de escala, figura *a*, quanto menor for o valor de $a(0)$ mais o Universo se aproxima de uma expansão eterna (compare a linha tracejada com a linha

pontilhada). Em contrapartida a redução da densidade de energia inicial leva o Universo a um recolapso (observe a linha com um traço e dois pontos, $a(0) = 1$ e $\rho(0) = 0,5$). Na figura *b* apresentamos os resultados para a densidade de energia. A redução de $a(0)$ faz com que a densidade se aproxime mais rápido de zero (linha cheia e linha pontilhada); por outro lado, a redução de $\rho(0)$ tarda ainda mais essa aproximação (linha com um traço e dois pontos e linha com dois traços e um ponto).

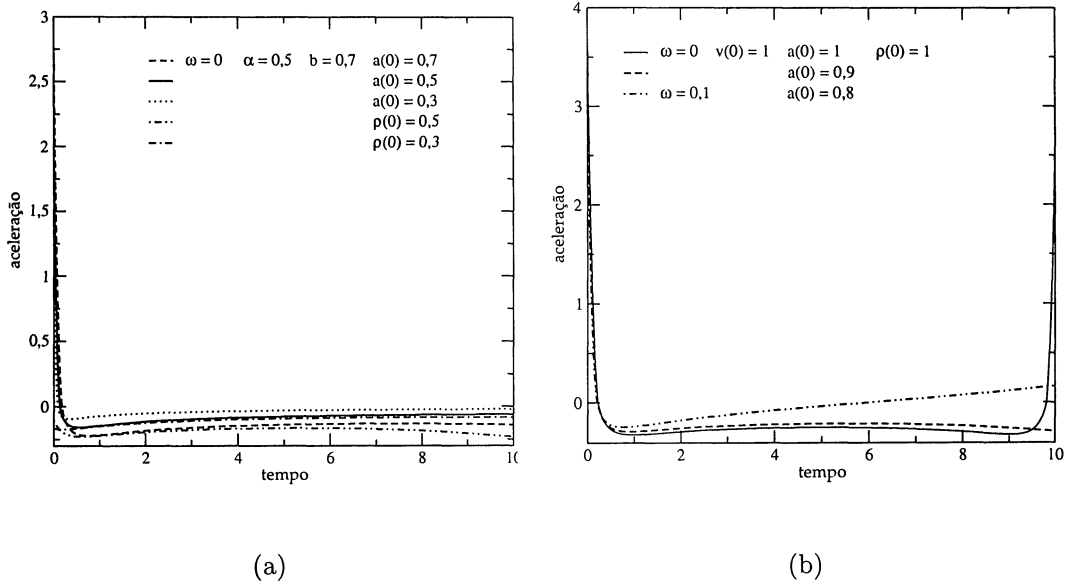


Figura 4.12: Aceleração com variação nas condições iniciais.

Na figura (4.12) está representado o comportamento da aceleração em função do tempo. No gráfico *a*, a variação em $a(0)$ produziu acelerações iniciais menores para valores cada vez menores, além da aproximação de zero ser mais rápida (linha cheia e linha pontilhada). A redução de $\rho(0)$ fez com que a aceleração assumisse apenas valores negativos, embora a aproximação de zero também tenha aumentado (linha com um traço e dois pontos). Através do gráfico *b* é possível notar que o decréscimo de $a(0)$ produziu uma aceleração sempre negativa no período de domínio da matéria (compare a linha cheia com a linha tracejada). A inclusão do termo não-linear neste caso é responsável pelo aumento do período de domínio da matéria e pela passagem da aceleração para valores positivos no período dominado pela energia escura (linha com um traço e dois pontos).

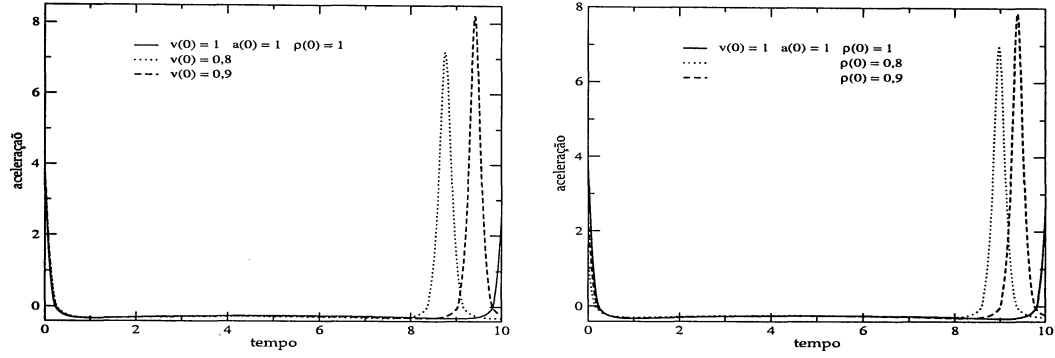


Figura 4.13: *Aceleração com $a(0)$ fixo.*

Na figura (4.13) apresentamos a aceleração quando as modificações são feitas somente sobre $\dot{a}(0)$ e $\rho(0)$. Ao contrário do que acontece com a variação do fator de escala, o universo passa a apresentar comportamento oscilatório com a redução de um destes dois parâmetros.

Na próxima seção estudamos modelos escalares 3D para universos com regime de três eras e energia escura associada a efeitos geométricos produzidos pela inclusão do termo não-linear.

4.3 Modelos $1/R$ em 3 D

Como foi apresentado no capítulo anterior existe também a possibilidade de se estudar modelos comológicos em 3D onde diferentes formulações foram testadas [2, 18, 28]. Nesses modelos o papel da energia escura é desempenhado por constituintes que são comumente usados nos modelos 4D, ou seja, pode ser modelada por um campo escalar [28], pela equação de Chapligyn [2], ou por uma constante cosmológica [18]. Nesta seção pretendemos analisar, de maneira análoga ao caso 2D, a contribuição de um termo não-linear em R e verificar a possibilidade de se interpretar essa contribuição como a correspondente energia escura num Universo 3D.

Os modelos que apresentamos a seguir estão baseados, em princípio, nas equações de Einstein. A primeira alternativa é trabalhar com o modelo escalar que segue diretamente da contração das equações de Einstein em 3D. A segunda é preservarmos o limite Newtoniano usando o modelo de Cornish e Frankel mencionado no capítulo 2. Invariavelmente nesses dois casos acrescenta-se um termo não-linear em R na dinâmica na tentativa de se simular geometricamente a presença da energia escura para valores grandes de t .

Começamos a análise e escrevemos a equação dinâmica em 3D como

$$R^2 - 2\kappa T R - \omega^2 = 0, \quad (4.16)$$

onde $\kappa = 2\pi G_2$ é a constante de acoplamento gravitacional 3D e $G_2 = 1$ em unidades naturais.

Resolvemos a equação acima para R e encontramos

$$R = 2\pi T \pm \sqrt{4\pi^2 T^2 + \omega^2} = 0. \quad (4.17)$$

Da suposição de um Universo homogêneo e isotrópico segue a métrica de RW em 3D,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (4.18)$$

onde consideramos $k = 0$ de acordo com um universo de curvatura espacial zero. Calculamos os símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura correspondentes,

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^0 = a\dot{a}, \quad \Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r \quad (4.19)$$

$$R_{00} = 2\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a}(\ddot{a} + \dot{a}^2), \quad R = 2\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2}, \quad (4.20)$$

assim a equação do campo gravitacional se torna

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \pi T + \frac{\sqrt{4\pi^2 T^2 + \omega^2}}{2}, \quad (4.21)$$

as fontes sendo representadas pelo traço do TEM ($\rho - 2p$) em 3D e a lei de conservação $T_{\mu\nu;\lambda} = 0$, obtemos as seguintes equações de movimento

$$\ddot{a} = -\frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{a\pi(\rho - 2p)}{2} + \frac{a\sqrt{4\pi^2(\rho - 2p)^2 + \omega^2}}{4}, \quad \dot{\rho} + 2H(p + \rho) = 0, \quad (4.22)$$

onde o constituinte das fontes é regido novamente pela equação de estado de van der Waals, apresentada no capítulo anterior

$$p = \frac{b\rho}{1 - \alpha\rho}. \quad (4.23)$$

Neste modelo o traço do TEM é positivo não ocorrendo inversão de sinal.

O sistema de equações diferenciais (4.22), é um sistema não-linear que pode ser resolvido numericamente. As seguintes condições iniciais normalizadas, foram usadas: $a(0) = 1$, $\dot{a}(0) = 1$ e $\rho(0) = 1$. Estas condições simulam um Universo 3D jovem, no começo do período inflacionário com transição para o domínio da matéria.

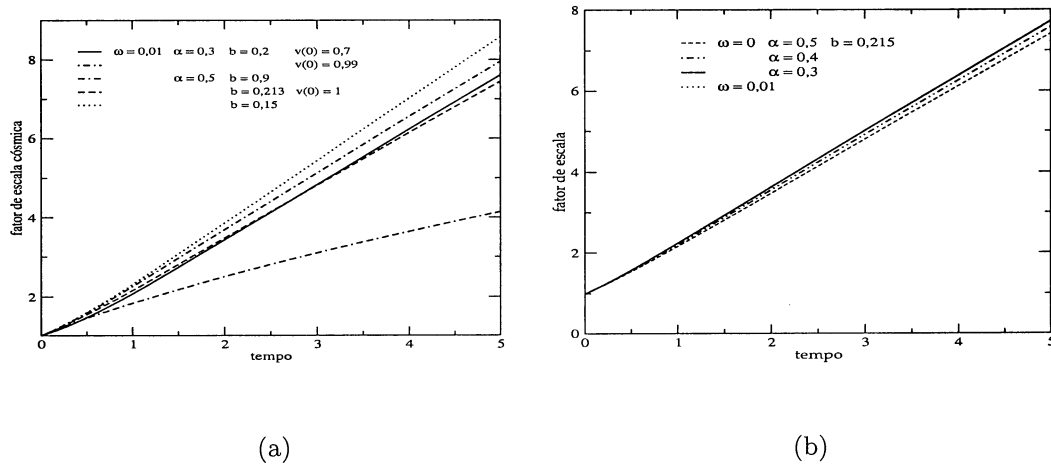


Figura 4.14: *Evolução do fator de escala, universo 3D.*

Começamos a análise com a evolução temporal do fator de escala que é apresentada na figura (4.14). No gráfico *a* podemos observar na maioria dos casos uma expansão eterna.

A exceção são os regimes em que se tomam valores altos do parâmetro b (próximos de 0.9, compare a linha com dois traços e um ponto com a linha pontilhada), em que ocorre um recolapso do Universo 3D (“big crunch”). Por outro lado, gráfico b , mantendo os outros parâmetros fixos, a redução do parâmetro α provoca uma expansão mais rápida. Valores muito pequenos de ω não alteram o comportamento do fator de escala (a linha pontilhada está sob a linha cheia).

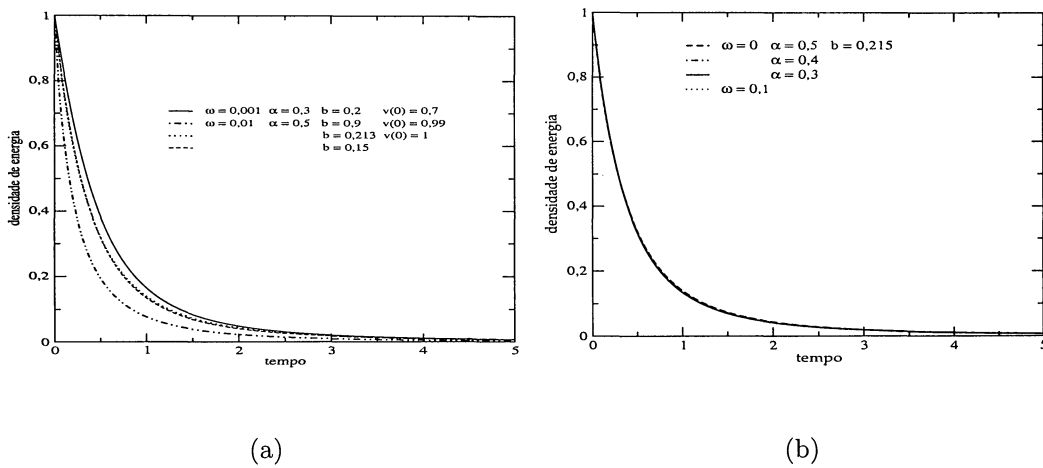


Figura 4.15: *Evolução da densidade de energia, universo 3D.*

A seguir analisamos os resultados referentes a densidade de energia do constituinte de van der Waals. Na figura (4.15) estão representadas as curvas correspondentes. As curvas são todas decrescentes confirmando o acordo com a expansão permanente do Universo (via conservação da densidade de energia) e conseqüentemente a queda de densidade. O termo em ω praticamente não afeta o comportamento do fator de escala nem da densidade de energia. Este resultado tem a mesma interpretação que no caso 2D: no universo jovem o termo não linear, que deveria corresponder a contribuição da energia escura, é muito pequeno.

Finalmente observamos o comportamento da aceleração. Na figura (4.16) apresentamos as curvas correspondentes. No gráfico a vemos que para tempos pequenos, existe uma forte dependência no parâmetro b da equação de vdW; para $b > 0,213$ a aceleração começa negativa, uma característica muito improvável para o começo do período inflacionário. Por outro lado, se $b < 0,15$ a aceleração permanece positiva para todos os instantes e desta forma

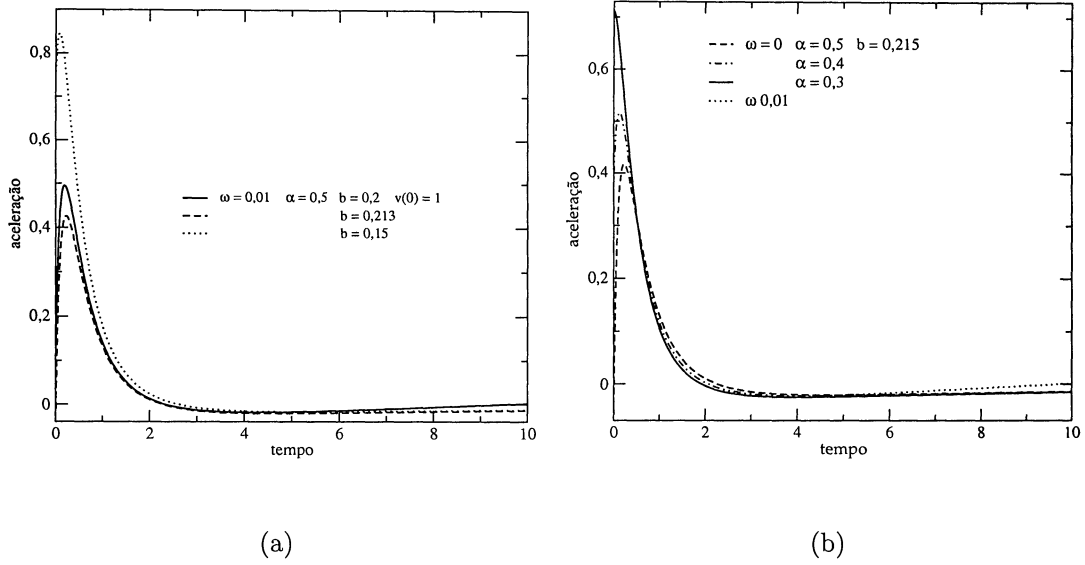


Figura 4.16: *Evolução da aceleração, universo 3D.*

a transição para a matéria não está sendo corretamente descrita pelo modelo. Em outra situação, se aumentamos o parâmetro α , mantendo os outros parâmetros fixos, a aceleração começa com valores cada vez maiores, por outro lado se diminuirmos α diminui também o valor do pico da aceleração (como mostra a figura do gráfico *b*) até que finalmente a aceleração comece com valores negativos. Todas estas propriedades acontecem a despeito da presença do termo não-linear em R pois para tempos pequenos sua contribuição é desprezível.

Para tempos grandes (observe a linha pontilhada da figura *b*) começa a se notar a importância da presença do termo não-linear. De fato graças a inclusão desse termo a aceleração entra num terceiro regime (com aceleração positiva). Através do gráfico é também possível ver que fazendo $\omega = 0$ esta terceira era não aparece. Este resultado mostra que o termo não-linear é responsável pela expansão com aceleração positiva para tempos grandes e portanto pode ser qualitativamente associado a uma representação geométrica da energia escura em universos 3D. O aumento de ω antecipa a transição reduzindo o intervalo em que o Universo é dominado pela matéria. A mudança de sinal de ω torna a solução inadequada pois gera raízes negativas. Como já afirmamos qualquer mudança drástica nos parâmetros da equação de vdW pode levar a casos indesejados, como uma aceleração completamente

negativa, por exemplo.

Finalmente é importante lembrar que esta dinâmica não possui um limite Newtoniano. A seguir veremos que tipo de resultados podem ser obtidos quando preservamos esse limite.

Como descrevemos no capítulo 2 o modelo que incorpora o limite Newtoniano em 3D é a formulação de Cornish e Frankel. A dinâmica gravitacional neste é escrita da seguinte forma:

$$R^2 + 2\kappa T R - \omega^2 = 0, \quad (4.24)$$

onde $\kappa = 2\pi G_2$ e $G_2 = 1$. A solução da equação algébrica fornece

$$R = -2\pi T \pm \sqrt{4\pi^2 T^2 + \omega^2} = 0. \quad (4.25)$$

Partindo novamente da suposição de um Universo homogêneo e isotrópico utilizamos uma métrica de RW em 3D,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (4.26)$$

onde consideramos novamente $k = 0$ (geometria plana). Calculando os símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, mais o traço do TEM ($\rho - 2p$) em 3D e a lei de conservação $T_{\mu\nu;\lambda} = 0$, obtemos as seguintes equações de movimento

$$\ddot{a} = -\frac{\dot{a}^2}{2a} - \frac{a\pi(\rho - 2p)}{2} + \frac{a\sqrt{4\pi^2(\rho - 2p)^2 + \omega^2}}{4}, \quad \dot{\rho} + 2H(p + \rho) = 0, \quad (4.27)$$

as fontes são regidas pela equação de estado de van der Waals, apresentada no capítulo anterior

$$p = \frac{b\rho}{1 - \alpha\rho}, \quad (4.28)$$

neste modelo o traço do TEM é negativo não ocorrendo inversão de sinal.

Apresentamos a seguir o comportamento da evolução do fator de escala, da densidade de energia e da aceleração através dos gráficos obtidos pela integração numérica, com as seguintes condições iniciais, $a(0) = 1$, $\dot{a}(0) = 1$ e $\rho(0) = 1$.

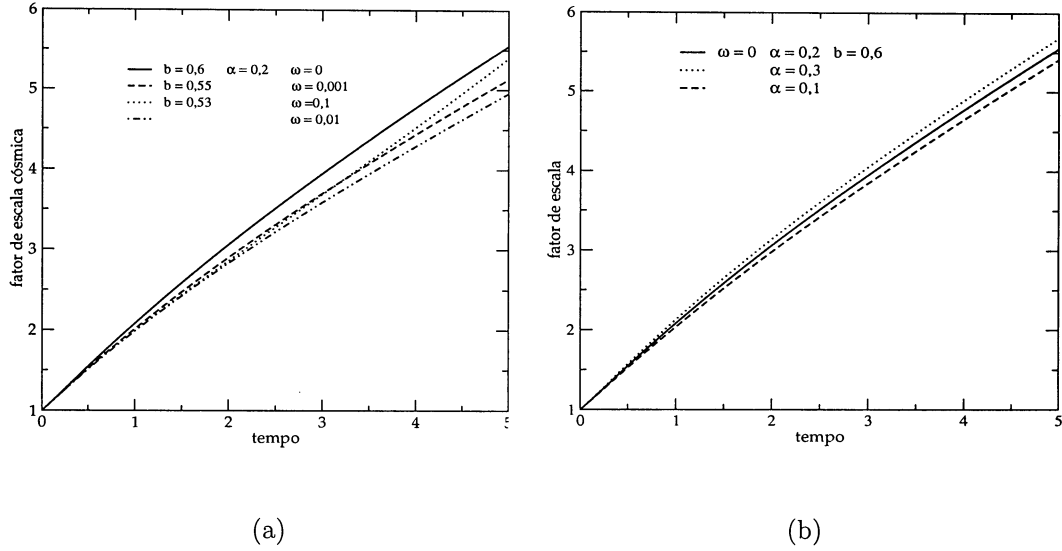


Figura 4.17: *Evolução do fator de escala, universo 3D.*

Na figura (4.17) está representada a evolução do fator de escala para diferentes valores dos parâmetros e das condições iniciais. Na figura *a*, o gráfico mostra que a redução de b torna a expansão mais lenta (linha cheia e linha tracejada); por outro lado, o aumento de ω torna a expansão mais rápida (linha pontilhada e linha tracejada). No gráfico da figura *b*, observamos que o aumento de α implica também em uma expansão mais rápida.

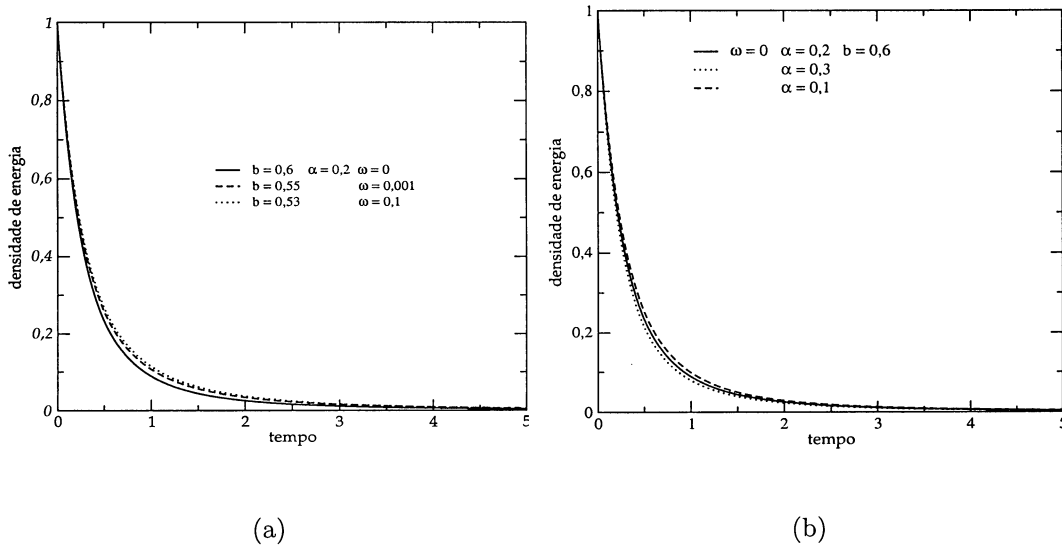


Figura 4.18: *Evolução da densidade energia, universo 3D.*

Na figura (4.18) apresentamos o comportamento da densidade de energia. Em acordo

com um Universo em expansão, a densidade é sempre decrescente. O decréscimo de b torna a queda mais suave (figura a), o aumento de α torna a queda mais abrupta (figura b).

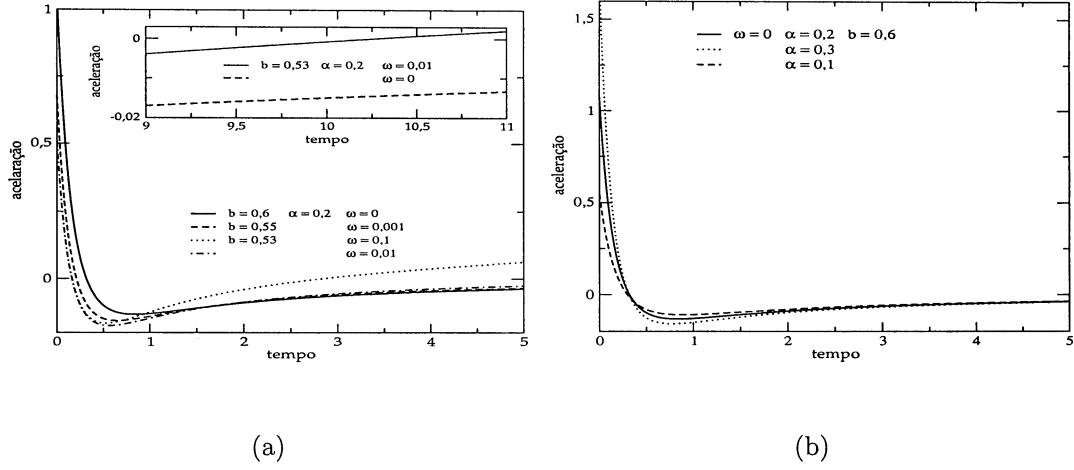


Figura 4.19: *Evolução da aceleração, universo 3D.*

A figura (4.19) mostra o comportamento da aceleração. Na figura a , vemos a primeira transição de um Universo dominado pelo inflaton para um Universo dominado pela matéria. No quadro menor podemos ver que o termo em ω é capaz de fazer o universo passar para um terceiro período governado pela energia escura. O aumento de b torna a queda da aceleração mais lenta e fornece um valor inicial maior. O mesmo acontece com o aumento de α no gráfico da figura b , observamos também que a redução desse valor aproxima a aceleração mais rapidamente de zero.

5

Conclusão

☆ Neste trabalho estudamos diversos modelos cosmológicos em dimensões reduzidas: os chamados modelos 2D e 3D. Com vistas a este objetivo foi feito um estudo da Teoria da Relatividade Geral de Einstein em que foi focalizada a sua parte operacional. A importância do campo gravitacional ($g_{\mu\nu}$) e sua ação sobre a matéria, da curvatura representada pelo tensor de Riemann, de uma formulação covariante para as leis de conservação e finalmente as próprias equações de campo. A partir desse ponto foram analisados os ingredientes básicos dos modelos cosmológicos que tomam como base a RG. Dada a observação do princípio cosmológico investigamos quais são as métricas que devem ser adotadas, e que leis podem descrever a expansão do universo. Analisamos também os mecanismos correspondentes a um universo que tem um período inicial de inflação e que após sua evolução possui uma densidade próxima da densidade crítica que provoca no universo uma geometria plana.

☆ O seguinte passo foi o estudo de modelos em dimensões reduzidas, envolvendo sistemas com forças gravitacionais, e em particular num contexto cosmológico. Em 2D analisamos o modelo de JT e de CGHS, onde o primeiro se comporta de modo mais promissor no contexto cosmológico incluindo uma descrição de universo com inflação e energia escura. Em 3D estudamos diversos modelos em que são incluídos torção,

constante cosmológica, soluções estáticas e não-estáticas, entre outros. Estudamos também uma teoria em 3D com limite Newtoniano que é chamado de modelo escalar de Cornish-Frankel. Finalmente analisamos um outro modelo escalar, sem limite Newtoniano (obtido a partir da contração das equações de Einstein em 3D), que utiliza teoria cinética dos gases relativísticos e dois constituintes para simular inflação em universos jovens e energia escura em universos velhos.

☆ Finalmente os nossos resultados originais estão ligados ao estudo do papel de termos não lineares nas teorias cosmológicas em 2D e 3D. No caso de 2D foi observado que o modelo que incorpora um limite teórico definido por JT não é adequado para descrever o comportamento do universo num período de domínio da matéria pois o leva impreterivelmente a um recolapso. Em outra situação focalizamos um modelo 2D que não possui limite de JT, que demonstrou um comportamento mais adequado. Embora neste caso os resultados estejam fortemente ligados às influências das condições iniciais e aos valores dos parâmetros da equação de vdW o modelo é eficiente na descrição de um universo 2D com três eras. Um ponto importante aqui é a redução do valor normalizado do fator de escala cósmico inicial $a(0)$ eliminou o caráter oscilatório do universo, garantido um período de aceleração negativa sem a mudança natural de sinal. O modelo apresenta também um terceiro período, com uma transição suave, somente através da adição do termo não-linear $1/R$.

☆ No caso 3D estudamos um modelo escalar, sem limite Newtoniano. O comportamento do fator de escala mostrou uma expansão eterna acompanhada de uma densidade de energia sempre decrescente. O termo não-linear não influencia o universo jovem mas se torna importante em tempos grandes onde propicia um novo período com aceleração positiva. Em outra situação, utilizamos um modelo com limite e traço do tensor energia-momento sempre negativo. A evolução temporal do fator de escala e

da densidade de energia possuem comportamento semelhante ao outro modelo. Estes regimes são obtidos para valores específicos dos parâmetros e das condições iniciais.

Referências Bibliográficas

- [1] J.D. Brown. *Lower Dimensional Gravity*. World Scientific, 1988.
- [2] M.B. Christmann, F.P. Devecchi, G.M. Kremer, and C.M. Zanetti. “Transition from accelerated to decelerated regimes in JT and CGHS cosmologies”. *Europhysics Letters*, 67(5):728–733, 2004.
- [3] G.M. Kremer and F.P. Devecchi. “Thermodynamics and kinetic theory of relativistic gases in 2D cosmological models”. *Physical Review D*, 65:12, 2002.
- [4] D.N. Vollick. “ $1/R$ Curvature Corrections as the Source of the Cosmological Acceleration”. *Physical Review D*, 68(6):063510–1, 2003.
- [5] G.M. Kremer and D.S.M. Alves. “Palatini approach to $1/R$ gravity and its implications to the late Universe”. *gr-qc/0404082*, 1:1, 2004.
- [6] N.J. Cornish and N.E. Frankel. “Gravitation in 2+1 dimensions”. *Physical Review D*, 43(8):2555–2565, 1991.
- [7] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.
- [8] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Teoria de Campo*. Editora Mir, 1980.
- [9] C. Moller. *The Theory of Relativity*. Oxford University Press, 1972.
- [10] V. Fock. *The Theory of Space Time and Gravitation*. Pergamon Press, 1959.
- [11] C. Cercignani and G.M. Kremer. *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. Birkhäuser Verlag, 2002.

- [12] C.W. Misner, J.A. Wheeler, and K.S. Thorne. *Gravitation*. W H Freeman, 1973.
- [13] A. Liddle. *An introduction to modern cosmology*. John Wiley and Sons, 2003.
- [14] J. Hawley and K. Holcomb. *Foundations of Modern Cosmology*. Oxford University Press, 1998.
- [15] I. Waga. A expansão do universo. “*Revista Brasileira do Ensino de Física*”, 22:163–175, 2000.
- [16] D. Grumiller. “Dilaton Gravity in Two Dimensions”. *hep-th/0204253*, 5, 2002.
- [17] S. Giddings, J. Abbott, and K. Kuchar. “Einstein Theory in a Three-Dimensional Space-Time”. *General Relativity and Gravitation*, 16:8, 1984.
- [18] J.D. Barrow, A.B. Burdt, and D. Lancaster. “Three-dimensional classical spacetimes”. *Class. Quantum Grav.*, 3:551–567, 1986.
- [19] R. Jackiw. “Lower Dimensional Gravity”. *Nuclear Physics B*, 252(1):343–356, 1985.
- [20] E.A. Sikkema and R.B. Mann. “Gravitation and cosmology in (1+1) dimensions”. *Class. Quantum Grav.*, 8:1, 1991.
- [21] K.C.K. Chan and R.B. Mann. “Cosmological models in two spacetime dimensions”. *gr-qc/9210015*, 2(8):1–13, 1992.
- [22] T. Strobl. “Gravity in Two Spacetime Dimensions”. *hep-th/0011240*, 1, 2000.
- [23] M. Cadoni and S. Mignemi. “Cosmology of Jackiw-Teitelboim model”. *gr-qc/0202066*, 2:1, 2002.
- [24] G.M. Kremer and F.P. Devecchi. “Viscous cosmological models and accelerated universes”. *Physical Review D*, 67:047301–1, 2003.
- [25] J.C.G. Callan, S.B. Giddings, J. A. Harvey, and A. Strominger. “Evanescence black holes”. *Physical Review D*, 45:2555, 1991.

- [26] J.C.G. Callan, S.B. Giddings, J.A. Harvey, and A. Strominger. “Evanecent black holes”. *Physical Review D*, 45(4):1005–1009, 1992.
- [27] S. Capozziello, S.D. Martino, and M.Falanga. “Van der Waals quintessence”. *Physics Letters A*, 299:494–498, 2002.
- [28] F.P. Devecchi, G.M. Kremer, and C. M. Zanetti. “Inflationary and dark energy regimes in 2+1 dimensions”. *Submetido a Europhysics Letter*, 2005.
- [29] N. Cruz and C. Martínez. “Cosmological scaling solutions of minimally couplet scalar fields in three dimensions”. *gr-qc/0007038*, 1:1–11, 2000.